受験番号	

２０１５（平成２７）年度（１０月入学）

２０１６（平成２８）年度（　４月入学）

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻

５年一貫制博士課程

入学者選抜試験　筆記（専門科目）問題

【注意事項】

・試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。

・本問題冊子は，６ページ（本紙を除く）である。

落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。

・６題の試験問題の中から，３題を選択，解答すること。

・選択した問題１題につき１枚（両面使用可）の解答用紙を使用すること。

追加の解答用紙が必要な場合は、試験監督者に申し出ること。

・問題冊子の表紙の指定箇所に受験番号を必ず記入すること。

・全ての解答用紙の指定箇所に選択問題番号及び受験番号を必ず記入すること。

・問題冊子の余白は計算に用いてよい。

・問題冊子及び解答用紙は持ち帰らないこと。

問題番号	数　学　－　1

次の行列を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

以下の設問に答えよ。

(1) 行列 A の固有値を求めよ。

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を求めよ。

(3) 次の 2 次方程式

$5x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 2xy - 2yz - 4zx + 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}z = 0$

で表される 2 次曲面を標準形に変換せよ。

(4) (3) で求めた 2 次曲面の名称を答えよ。

問題番号	数　学　－　２

関数 $f(x) = \dfrac{x^{b-1}}{x^a + 1}$ $(0 < b < a)$ について、定積分

$$I = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

を考える。以下の設問に答えよ。

(1) $y = x^a$ と変数変換し、$I = \displaystyle\int_0^\infty g(y)\,\mathrm{d}y$ のように表すとき、$g(y)$ を求めよ。

(2) I を求めるため、z を複素数とし、経路積分

$$I_{\mathrm{C}} = \oint_{\mathrm{C}} g(z)\,\mathrm{d}z$$

を考える。ここで、積分経路Cは図の $\mathrm{C_I} \to \mathrm{C_{II}} \to \mathrm{C_{III}} \to \mathrm{C_{IV}}$ のようにとる。$R \to \infty$ および $\varepsilon \to 0$ のとき

$$\int_{\mathrm{C_{II}}} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathrm{C_{IV}}} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

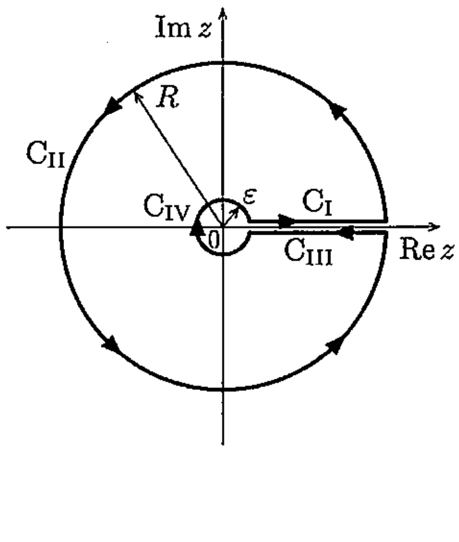
であることを示せ。

(3) $R \to \infty$ および $\varepsilon \to 0$ のとき

$$I_{\mathrm{C_I + C_{III}}} = \int_{\mathrm{C_I}} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathrm{C_{III}}} g(z)\,\mathrm{d}z$$

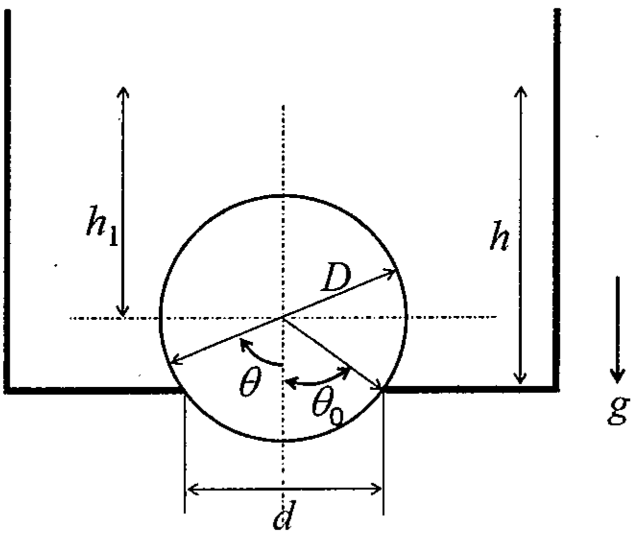
を I を用いて表せ。

(4) (2)、(3) の結果と留数定理により、I を求めよ。



問題番号	理 工 学 － 1

水深 h の水タンクの底に直径 d の穴が開いている。そこに直径 D の球がはまっている。球の自重は無視できるとし、d は D より小さく、球全体は水面下にある。水の比重を ρ、重力加速度を g とする。



(1) 球の中心の水深を h_1、角度 θ を図のようにとる。穴の縁の角度は θ_0 である。角度 θ（$> \theta_0$）の位置の表面にかかる水の圧力を求めよ。

(2) (1)で得られた圧力を球の表面積にわたって積分することにより、球にかかる浮力 F を求めよ。ただし、上向きの力を正とする。

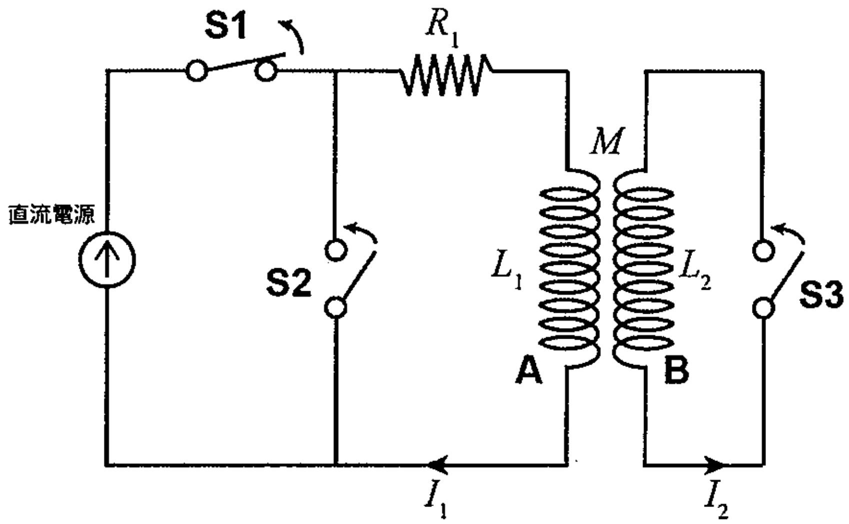
(3) h_1 と θ_0 を他の変数で置き換え、(2)で得られた結果を h、d、D の関係式とせよ。

(4) $D = 10$ cm、$d = 8$ cm のとき、球が浮いてこない h の条件を求めよ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２７年度１０月入学・平成２８年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	理 工 学 － 2

図に示すように、直流電源、抵抗R_1、自己インダクタンスL_1を有するコイル **A** からなる一次回路と自己インダクタンスL_2を有するコイル **B** からなる二次回路が相互インダクタンスMで結合している。コイル **A** を流れる電流をI_1、コイル **B** を流れる電流をI_2として、次の問いに答えよ。ただし、コイル **A**、コイル **B** の抵抗、スイッチにおけるエネルギー損失は無視する。



(1) スイッチ **S1** が**閉**、スイッチ **S2** と **S3** が**開**の状態で、直流電源を用いて、一次回路に定常の電流I_0を通電する。この状態から、時刻$t=0$において、瞬時にスイッチ **S1** を**開き**、同時にスイッチ **S2** と **S3** を**閉じる**（図の矢印のとおり）。その後（$t>0$）のI_1の時間変化を時刻tの関数として求めよ。

(2) (1)におけるI_2の時間変化を時刻tの関数として求めよ。

(3) (1)の操作から十分に時間が経過したときのI_1とI_2を求めよ。

(4) コイル A とコイル B の間で磁束が漏れなく、結合係数が 1 であるとすると、(1)の操作で電流がどのように変化するか説明せよ。

量子力学では、波動関数を用いて粒子の運動状態を記述する。波動関数

$$\varphi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + ik_0x\right)$$

で表される一次元のガウス関数型の波束を考える。ここで、a、k_0、A は、それぞれ正の実数である。また、i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$)、x は位置を表す変数である。

(1) 定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}a$$

を証明せよ。また、証明した関係式を用いて、規格化

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

を行って規格化定数 A を定めた後、位置の確率密度 $|\varphi(x)|^2$ を数式で表せ。

(2) 問題 (1) で求めた位置の確率密度 $|\varphi(x)|^2$ を図示せよ。図はフリーハンドでよいが、確率密度 $|\varphi(x)|^2$ の最大値、最大値を与える x の値、最大値の $1/e$ 倍における分布の全幅 Δx を、この問題で用いられている変数 (π を含む) を用いて図中に記載すること。e は自然対数の底である。

(3) 波動関数 $\varphi(x)$ を運動量表示すると、

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \mathrm{d}x$$

となることを用いて、運動量の確率密度 $|F(p)|^2$ を数式で表し、さらに図示せよ。ここで、p は運動量を表す変数であり、$\hbar = h/(2\pi)$ で、h はプランク定数である。計算の過程で、ラプラス積分

$$I(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} \exp(-x^2)\cos 2\lambda x \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-\lambda^2)$$

を用いてよい。図はフリーハンドでよいが、確率密度 $|F(p)|^2$ の最大値、最大値を与える p の値、最大値の $1/e$ 倍における分布の全幅 Δp を、この問題で用いられている変数 (π を含む) を用いて図中に記載すること。

(4) 問題 (2)、(3) で図示した分布の幅 Δx、Δp を用いて、$\Delta x \cdot \Delta p \approx h$ が成立していることを示せ。

問題番号	理工学 － 4

圧力 1 MPa、体積 10 m^3 の理想気体（状態 A とする）を、等温的に 1 m^3 まで圧縮し（状態 B とする）、その後、断熱的に 10 m^3 まで膨張させた（状態 C とする）。以下の問いに答えよ。ただし、単原子気体の比熱比は 5/3、二原子気体の比熱比は 7/5 とする。解答の過程で 10 のべき乗の数値が出てくる場合には、そのままで留めておいてよい。

(1) 単原子気体の場合の圧力・体積の変化を計算し、その結果を、横軸：体積 V(m^3)、縦軸：気圧 p (MPa)の図として示せ。フリーハンドでよいが、状態 A、B、C の位置を図中に示し、その座標(V, p)も記入せよ。

(2) 二原子気体の場合の圧力・体積の変化を計算し、その結果を、横軸：体積 V(m^3)、縦軸：気圧 p (MPa)の図として示せ。フリーハンドでよいが、状態 A、B、C の位置を図中に示し、その座標(V, p)も記入せよ。

(3) 問題(1)、(2)の A⇒B⇒C の状態変化で気体に正味の仕事が行われる。

(a) その理由を、問題(1)、(2)で作成した図の特徴に言及しながら簡潔に記せ。

(b) 気体に行われる正味の仕事が大きいのは、問題(1)と問題(2)のいずれの場合であるか答えよ。また、その理由を、問題(1)、(2)で作成した図を比較しながら簡潔に記せ。