総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２５年度１０月入学・平成２６年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	数　学　－　１

以下に示す行列$\mathbf{A}$、ベクトル$\mathbf{b}$について、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1/2 \\ -3 & 2 & -1 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3/2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

（１）$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$を満たす下三角行列$\mathbf{L}$および上三角行列$\mathbf{U}$を求めなさい。ただし、

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

と表される。

（２）連立１次方程式$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$の解$\mathbf{x}$を求めなさい。

問題番号	数　学　－　2

次の微分方程式の解について考えよ．

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega^2u=A\cos(\Omega t) \qquad (*)$$

ただし，α, ω, A, Ω は実定数，$\omega>\alpha>0$，u は実関数，t は実変数とする．ここで，u_h を式 $(*)$ の斉次方程式の一般解，u_p を式 $(*)$ の特殊解とする．このとき，式 $(*)$ の一般解は，$u=u_h+u_p$ と与えられる．

(1) 式 $(*)$ の右辺が 0 である斉次方程式の一般解 u_h を求めよ．

(2) B および C を定数として $u_p=B\cos(\Omega t)+C\sin(\Omega t)$ という解の形を考え，特殊解 u_p を求めよ．

(3) $t\gg 1/\alpha$ として，以下の関係を示せ．

$$\left\langle 2\alpha\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\rangle=\left\langle A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cos(\Omega t)\right\rangle$$

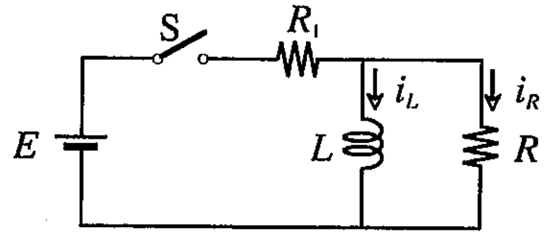
ただし，$\langle X\rangle$ はある量 X の周期 $T=2\pi/\Omega$ にわたる平均とする．

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２５年度１０月入学・平成２６年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	理 工 学 － 1

1. 図１に示す回路においてスイッチＳを$t=0$の時刻に閉じた時、抵抗Rに流れる電流i_RとインダクタンスLを持つコイルに流れる電流i_Lを時間tの関数として求めよ。ここでEは電源の電圧値、R_1はRとは異なる抵抗を表す。

図１

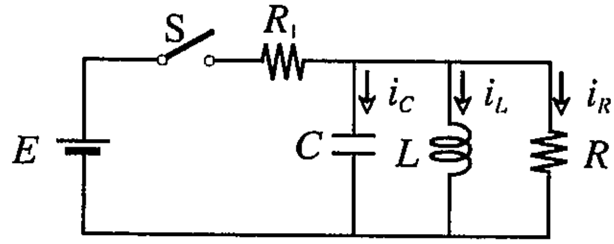


2. Ｓを閉じた後、$t=t_1$の時刻に再びＳを開くとする。その後のi_Rとi_Lを時間tの関数として求めよ。

3. i_Rとi_Lについて、$t=0$から$t=t_1$の後までの全体のグラフを書け。

4. 図２に示す回路においてスイッチＳを$t=0$の時刻に閉じた時、抵抗Rに流れる電流i_R、インダクタンスLを持つコイルに流れる電流i_L、コンデンサCに流れる電流i_Cの間の関係式を導け。ただしコンデンサの電荷は$t=0$でゼロとする。

図２



5. 電流i_R、i_L、i_Cの時間変化が減衰振動の形になるための条件を、回路素子の値を用いて示せ。

6. その時のi_R、i_L、i_Cを時間tの関数として求めよ。

問題番号	理 工 学 － 2

(1) 1 mol の理想気体が温度 T で等温変化し、体積がV_1からV_2となる時の仕事Wを求めよ。

(2) 理想気体が断熱変化する場合、$TV^{\gamma-1}$ = 一定、PV^{γ} = 一定となることを導け。ここで T は温度、V は体積、P は圧力、γ は比熱比とする。定積モル比熱 C_v、定圧モル比熱 C_p, および気体定数 R は、$C_p - C_v = R$の関係にある。

(3) 理想気体が温度 T_1の高温熱源と温度 T_2 の低温熱源との間でカルノーサイクルを行う場合、熱機関の効率 が $\eta = 1 - T_2/T_1$ で表されることを示せ。

(4) 1 mol のファン・デル・ワールス気体の状態方程式は $(P + a/V^2)(V - b) = RT$ で表される。内部エネルギーが、温度と体積の関数となることを導け。ここで P は圧力、Vは体積、Tは温度、a, bは定数、Rは気体定数とする。定積モル比熱 C_v は一定とする。

問題番号	理 工 学 － 3

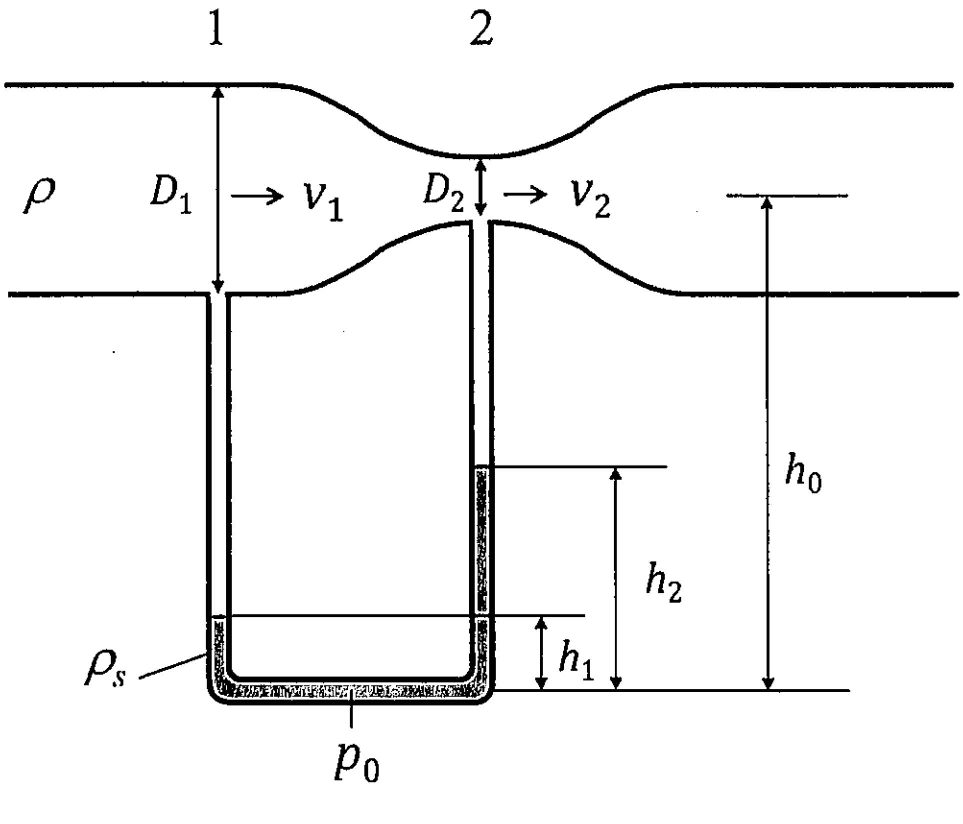
図に示すようなベンチュリ管が水平に置かれ、内部に質量密度 ρ の流体が流れている。断面１、２における管径、速度、圧力をそれぞれ D_1、D_2、v_1、v_2、p_1、p_2 とする。断面１，２には質量密度 ρ_s となる流体を入れたマノメータを取り付けてあり、高さがそれぞれ h_1、h_2 となっている。また、マノメータ最下部から管中心部までの距離を h_0 とする。以下の問いに答えよ。ただし重力加速度は g とし、管内のエネルギー損失、粘性および圧縮性は無視できるものとする。

(1) 断面１、２間での連続の式、ベルヌーイの式を書き、D_1、D_2、p_1、p_2、ρ を用いて断面 1 における流体の速度 v_1 を求めよ。

(2) マノメータ最下部での圧力 p_0 を求め、断面 1、2 での圧力差 $p_1 - p_2$ を求めよ。

(3) 管内の体積流量 Q を p_1、p_2 を用いずに示せ。

(4) 図において、マノメータに比重 13.6 の水銀を入れ、ベンチュリ管に毎分 600 リットルの水を流した。$D_1 = 0.21\ \mathrm{m}$、$D_2 = 0.11\ \mathrm{m}$ である時、水銀柱の差 $h_2 - h_1$ はいくらか。重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m^2/s}$ とする。



問題番号	理 工 学 － 4

1次元で運動する質量mの自由粒子を考える。初期時刻$(t=0)$における波動関数は

$$\psi(x,0)=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(i\frac{p_0}{\hbar}x-\frac{ax^2}{2}\right)$$

で与えられるとする。ここで、$i=\sqrt{-1}$、xは粒子位置、$a(>0)$とp_0は実数パラメータである。$\hbar=h/(2\pi)$であり、hはプランク定数とする。時刻tにおける波動関数は

$$\psi(x,t)=\psi(x,0)\exp\left(-i\frac{H}{\hbar}t\right)$$

によって与えられる。ここで、Hはこの粒子のハミルトニアンであって、pを運動量として$H=p^2/(2m)$である。力学変数$A(x,p)$の時刻tにおける期待値は

$$\langle A\rangle_t=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)A(x,p)\psi(x,t)dx$$

により与えられる。ここで、$\psi^*(x,t)$は$\psi(x,t)$の複素共役である。次のガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2-iqx)dx=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{q^2}{4\alpha}\right)$$

を用いてもよい。ここで、複素数αの実数部分は$\mathrm{Re}(\alpha)>0$であり、qは実数である。以下の問いに答えよ。

(1) $t=0$における期待値$\langle x\rangle_0$と$\langle x^2\rangle_0$を計算せよ。

(2) $t=0$における運動量空間中の波動関数$\tilde{\psi}(p,0)$を計算せよ。ただし、求めた$\tilde{\psi}(p,0)$は規格化されていること。

(3) $t=0$における期待値$\langle p\rangle_0$と$\langle p^2\rangle_0$を計算せよ。

(4) $t=0$におけるxとpの不確定さをそれぞれ$(\Delta x)_0^2\equiv\langle x^2\rangle_0-\langle x\rangle_0^2$、$(\Delta p)_0^2\equiv\langle p^2\rangle_0-\langle p\rangle_0^2$とする。$(\Delta x)_0^2(\Delta p)_0^2$の値を求めよ。

(5) $t>0$における運動量空間中の波動関数$\tilde{\psi}(p,t)$を計算せよ。ただし、求めた$\tilde{\psi}(p,t)$は規格化されていること。

(6) $t>0$における波動関数$\psi(x,t)$は、(5)の結果を使って、

$$\psi(x,t)=\left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{z}}\exp\left(i\frac{p_0}{\hbar z}x-\frac{ax^2}{2z}-\frac{ip_0^2t}{2m\hbar z}\right)$$

と求まる。ここで$z=1+i\hbar at/m$である。$|z|^2=1+(\hbar at/m)^2$とする。$t>0$におけるxとpの不確定さをそれぞれ$(\Delta x)_t^2\equiv\langle x^2\rangle_t-\langle x\rangle_t^2$、$(\Delta p)_t^2\equiv\langle p^2\rangle_t-\langle p\rangle_t^2$とする。不確定性関係$(\Delta x)_t^2(\Delta p)_t^2\geq\hbar^2/4$を確かめよ。