問題番号	数　学　－　1

次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数であり，$(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n$,
$(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ である．

(1) 不定積分 $I_n = \int \sin^n x dx$ について，I_n と I_{n+2} の関係を表す漸化式を求めよ．

(2) 問 (1) の結果を使って定積分 $K_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ について値を求めよ．

(3) ベータ関数 B とガンマ関数 Γ は，

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x>0, y>0), \\ \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x>0), \end{aligned}$$

によって定義され，以下のような関係がある．

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

次の４つの関係を証明せよ．

(a) $\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta$,

(b) $\Gamma(n+1) = n!$,

(c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

(d) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

(4) 問 (3) の結果を使って定積分 $H_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ の値を求めよ．

関数 $x(t)$、 $y(t)$ についての常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = & -2x + y \end{cases}$$

の解を以下の手順で求めよ。

(1) 常微分方程式を

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書いたとき、行列 A の固有値 λ_1、λ_2、固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ。

(2) $B = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ として、関数 $X(t)$、$Y(t)$ を以下のように定義する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

このとき dX/dt、 dY/dt の満たすべき方程式を求めよ

(3) 問 (2) の結果を使って $x(t)$、$y(t)$ の一般解を求めよ。

(4) $x(t)$、 $y(t)$ の初期値がそれぞれ $x(0) = 4$、 $y(0) = 2$ の時、解を求めよ。

問題番号	物 理 ー 1

地上で微小振動している振り子を考える．振り子のおもりは質量 m であり，質量が無視できるひもによってつるされている．ただし，空気抵抗及び支点における摩擦は無視する．地球の自転とともに一定の角速度 Ω で回転している系から見たおもりに対する運動方程式は，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{f} - m\boldsymbol{g} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \qquad \text{(A)}$$

によって与えられる．ここで，$\boldsymbol{R}$ はおもりの位置，$\boldsymbol{f}$ は復元力，$m\boldsymbol{g}$ は重力，$\boldsymbol{\Omega}$ は大きさ Ω をもつ角速度ベクトルを表す．ただし，$m\boldsymbol{g}$ は，地球の中心方向への万有引力と地球の自転による遠心力の合力であり，ここでは一定とみなされる．地表に固定された直交座標系 (x, y, z) とその原点 O，及び O の緯度 θ を図 1 に示されるように定義する．振り子の支点は z 軸上のある点 $(z > 0)$ に固定されている．式 (A) の $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R} = (x, y, z)$ で表される．以下の問いに答えよ．

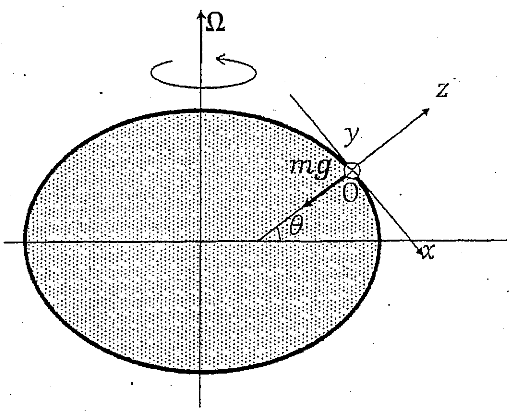


図 1: 図中の太実線は地表を表す．地表の点 O における緯度 θ は図のように定義する．

(1) 微小振動しているので，$z = dz/dt = 0$ とみなす．復元力は変位に比例するとして $\boldsymbol{f} = (-kx, -ky, 0)$ とおく．ここで k は比例定数である．おもりに対する運動方程式の x 成分と y 成分を書け．

(2) おもりの角運動量を $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times (m\, d\boldsymbol{R}/dt)$，おもりに働く力の総和を $\boldsymbol{F}$ としたとき，$d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F}$ と書けることを示せ．また，問 (1) の結果を使って dL_z/dt を x，y，dx/dt，dy/dt，m，Ω，θ を用いて表せ．ただし，L_z は $\boldsymbol{L}$ の z 成分である．

(3) 問 (2) で得られた dL_z/dt を時間積分して，L_z を x，y，m，Ω，θ を用いて表せ．ただし，おもりは $t = 0$ のとき原点を通過するとする．

(4) $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ のように (x, y) を極座標 (r, ϕ) へ変数変換することによって，$\boldsymbol{L}$ の定義から $L_z = mr^2\, d\phi/dt$ となることを示せ．また，問 (3) で得られた L_z に対して変数変換を行うことによって，$d\phi/dt$ を Ω と θ を用いて表せ．

(5) $t = 0$ のとき，$r = 0$ かつ $dr/dt = v_0$ であるとして，振り子の振幅 r についての運動方程式を解き，r を t，k，m，Ω，θ，v_0 を用いて表せ．

問題番号	物 理 ー 2

N 個の独立な粒子からなる系を考える．各々の粒子は，位置が固定されているものとし，0および ε の２つのエネルギー準位を取り得るとする．このとき，系の全エネルギーを $E = n\varepsilon$ と表す．ただし，n はエネルギー準位 ε である粒子の個数とする．また，N は偶数，ε は正の実数値とする．以下のように，この系の比熱 C と絶対温度 T の関係を求める．粒子は区別できるものとして扱う．

(1) 系のエントロピー S は，$S = k \ln \Omega(E)$ のように与えられるとする．ただし，k はボルツマン定数である．このとき，$\Omega(E)$ の意味を説明せよ．

(2) 系のエントロピー S を N および n を用いて記せ．

(3) M は大きな正の整数 (つまり，$M \gg 1$) として，スターリングの公式 $\ln M! \approx M \ln M - M$ を導け．

以下では，$N \gg 1$ とし，E を連続な量として扱う．

(4) 問 (3) のスターリングの公式を用いて，問 (2) の S を書き直せ．このとき，S が最大となる n の値を求めよ．

(5) 絶対温度 T が正の値であるための n の取り得る範囲について論じよ．

(6) 問 (5) の条件の下，この系の比熱 C と絶対温度 T の関係を求めよ．

問題番号	物 理 － 3

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t)$$

により記述される１次元量子力学系を考える。ここで，$\hbar = h/(2\pi)$ であり，h はプランク定数である。ハミルトニアンは，

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$$

により与えられる。$\psi(x,t)$ は波動関数，x は位置座標，t は時間，$p = -i\hbar\partial/\partial x$ は運動量，m は質量，$V(x)$ はポテンシャルエネルギーを表す。時間 t に依存しない力学変数 $A(x,p)$ の平均値（期待値）は

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)A(x,p)\psi(x,t)dx$$

により与えられる。ここで，$\psi^*(x,t)$ は $\psi(x,t)$ の複素共役を表し，$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = 1$ が仮定されている。平均値 $\langle A\rangle$ は時間 t の関数であることに注意せよ。

(i) 平均値 $\langle A\rangle$ が

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle[A,H]\rangle$$

を満足することを示せ。ここで，A と H の交換子は $[A,H] = AH - HA$ により定義される。

(ii) ポテンシャルエネルギーが $V(x) = m\omega^2x^2/2$ で与えられる調和振動子の１次元量子力学系を考える。平均値 $\langle x\rangle$ と $\langle p\rangle$ の時間依存性を決定するための常微分方程式を導出せよ。

(iii) (ii) で与えられた調和振動子の１次元量子力学系に対して，変数 X，Y，Z を

$$X = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2, \qquad Y = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2, \qquad Z = \langle xp+px\rangle - 2\langle x\rangle\langle p\rangle$$

によって，それぞれ定義する。変数 X，Y，Z が

$$\frac{dX}{dt} = \frac{Z}{m}, \qquad \frac{dY}{dt} = -m\omega^2 Z, \qquad \frac{dZ}{dt} = 2\left(-m\omega^2X + \frac{Y}{m}\right)$$

を満足することを示せ。

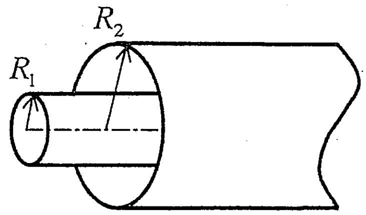
(iv) (iii) で与えられた $X(t)$，$Y(t)$，$Z(t)$ に対する常微分方程式の一般解を求めよ。$X(t)$ および $Y(t)$ が定数となる条件は

$$m^2\omega^2X(0) = Y(0), \qquad Z(0) = 0$$

で与えられることを示せ。

問題番号	工 学 － 1

半径 R_1、R_2（$R_1 < R_2$）の無限に長い二つの同軸円筒型導体によって構成されたコンデンサを考える。局所的電界の強度が大気中絶縁破壊電界 E_b（E_bを越えた時に絶縁破壊が起きるとする）によって制限される条件において以下の質問に答えよ。導体間は大気であり、その誘電率は真空の値ε_0で近似する。



(1) 任意の半径位置 r におけるコンデンサ内の電界強度を、単位長あたりの電荷量 q を用いて表せ。

(2) コンデンサ内の最大の局所的電界強度が E_b を越えない条件を、q 、R_1 、R_2等を用いて表せ。またその E_b を用いて、絶縁破壊が起きない条件での、導体間の最大電圧V_bを表せ。

(3) 外側の導体の半径 R_2 を固定した時、導体間の最大電圧を与える R_1 を求めよ。その電圧値はいくらか。

(4) コンデンサに蓄えられる単位長あたりのエネルギーを q、R_1 及びR_2で表せ。

(5) (3)と同様にR_2 を固定した時、絶縁破壊が起きない条件での最大のエネルギーを与えるR_1 を求めよ。その時単位長あたりのエネルギーはいくらか。

(6) E_b = 1.0 MV/m、R_2 = 1.0 cm とした時、(3) の電圧及び (5) の単位長あたりのエネルギーの値を、有効数字 2 桁で求めよ。

問題番号	工 学 － 2

図１に示すように、抵抗 R と自己インダクタンス L を有したコイルが、抵抗 R_0 と直列に電圧 V の電池に接続されている。また、最初、スイッチ S_1、および、S_2 は開いているものとする。

(1) スイッチ S_1 が閉じられた後のコイルの両端電圧 V_{pq} を時刻 t の関数として表せ。

(2) 回路の電流が定常状態に達した後、スイッチ S_2 が閉じられたとする。この後、スイッチ S_2 を流れる電流の式を時刻 t の関数として表せ。

(3) コイルは円環形状のソレノイドで大半径 r が 300 mm、小半径 a が 50 mm とし（図２参照）、抵抗率 2×10^{-8} Ωm、直径 0.4 mm の銅線が非磁性体の巻枠の上に 10000 回巻かれている。このコイルについて、$r \gg a$ の近似を用いて自己インダクタンス L を求めよ。また、コイルの抵抗 R を求めよ。ただし、円周率は 3 として近似せよ。

(4) 上記で得られたコイルの自己インダクタンスと抵抗を用い、電池電圧 V を 100 V、抵抗 R_0 を 500 Ωとするとき、スイッチ S_2 が閉じられてから 0.001 秒後に S_2 を流れる電流の大きさと方向を示せ。また、その瞬間に今度はスイッチ S_1 を開いたとして、そこからさらに 0.001 秒経過した後に S_2 を流れる電流の大きさと方向を示せ。

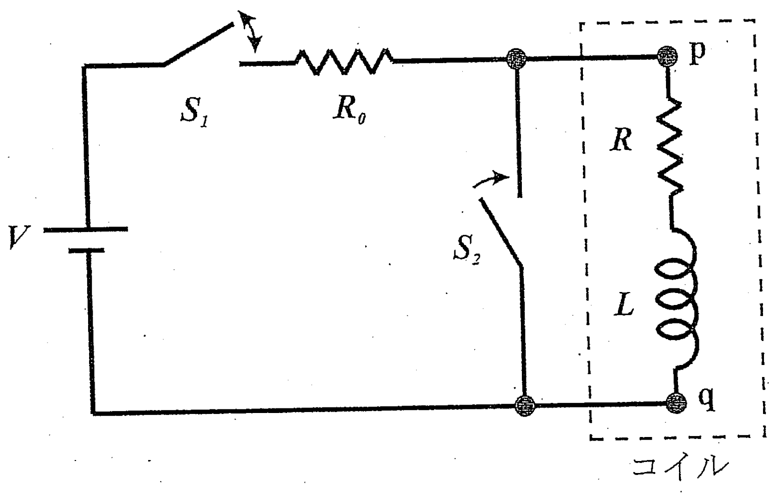


図１

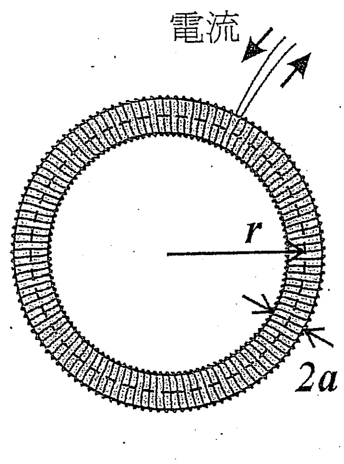


図２

問題番号	工 学 － 3

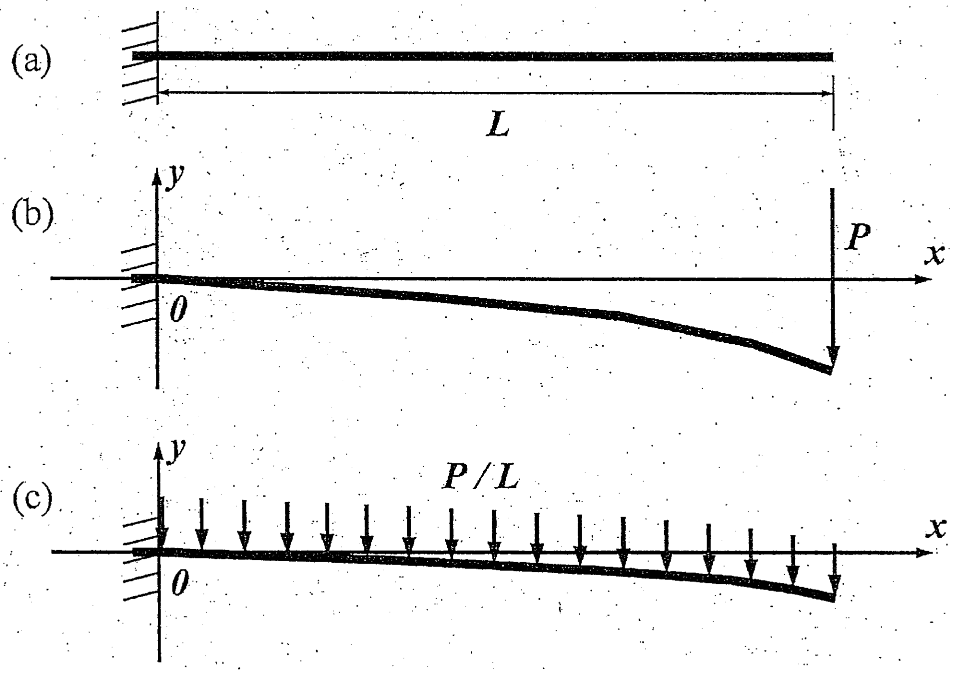
図(a)に示すように長さLの水平な片持梁を考える。図(b)に示すように、この片持梁はその端で集中荷重Pを受けている。
x及びy座標の原点を梁の左端に置くこととする。梁の縦弾性係数E、断面二次モーメントIはそれぞれ一定とする。梁の自重は無視するものとする。

(1) 位置xにおける曲げモーメントを示せ。

(2) 片持梁の最大たわみ及び、最大たわみ角を求めよ。

次に、図(c)に示すように、片持梁が等分布荷重P/Lを受けている場合を考える。

(3) 最大たわみ及び、最大たわみ角を求めよ。



図