総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成　１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	数学　－　1

級数 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{n}-\log_e(n)$ に関して、以下の問いに答えよ。

問 1 $\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\log_e(n)$ の関係を利用し、任意の正の整数 n に対して $f(n)>0$ であることを証明せよ。

問 2 任意の正の整数 n に対して $f(n+1)-f(n)<0$ であることを証明せよ。

問 3 $n\to+\infty$ の時、$f(n)$ は発散せずに一定の値に収束する。その理由を述べよ。

問 4 $f(n)$ の $n\to+\infty$ での収束値は零でないことを示せ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成 １８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	数学 － 2

以下の設問に答えよ。

問 1 変数 x の関数 $y=\varphi(x)$, その導関数 $y'=\varphi'(x)$ を含む関数 $F(x,y,y')$ の x に関する定積分 I が $I=\int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$ で与えられるとする。関数 $y=\varphi(x)$ が連続関数で $\varphi(a)=\alpha, \varphi(b)=\beta$ の時、定積分 I が極小もしくは極大値を持つための必要条件は関数 $y=\varphi(x)$ が $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)-\dfrac{\partial F}{\partial y}=0$ を満たすことであることを示せ。ここで、a,b,α,β は定数、$'$ は x に関する微分を表す。

問 2 問 1 の関数 F が x を陽に含まない時、定積分 I が極小もしくは極大値を持つための必要条件は関数 $y=\varphi(x)$ が $F-y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}=C$ を満たすことであることを示せ。ここで、C は定数である。

問 3 xy 平面上の 2 点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ を結ぶ曲線に沿った距離 L は $L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$ で表されることを示せ。ここで、x_1,y_1,x_2,y_2 は定数で、$x_2>x_1$ とする。

問 4 2 点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ を結ぶ最短の経路は P_1,P_2 を通る直線であることを、問 1 もしくは問 2 の結果を使って示せ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	工学Ａ － １

伝熱に関する以下の問いに答えよ。

問１　次の２つの場合について、単位時間あたりの液体Ａから液体Ｂに流れる熱量を求めよ。ただし、液体Ａ，Ｂと壁との熱伝達率をそれぞれ h_A，h_B、壁の熱伝導率を λ とする。壁を通した熱移行のみを考える。式の導出過程も示すこと。

(a)　図１のように高さＨの直方体領域において、温度 T_A と T_B（$T_A > T_B$）の液体Ａ，Ｂが厚さＷ、長さＬの平板壁をはさんでいるとき。

(b)　図２のように高さＨの円柱領域において、温度 T_A と T_B（$T_A > T_B$）の液体Ａ，Ｂが内径 r_1、外径 r_2 の円筒壁をはさんでいるとき。

問２　伝熱面温度が飽和温度以上の領域において、液体と壁の間の熱流束を伝熱面温度の関数として略図で示し、各領域の名称とその状態を説明せよ。

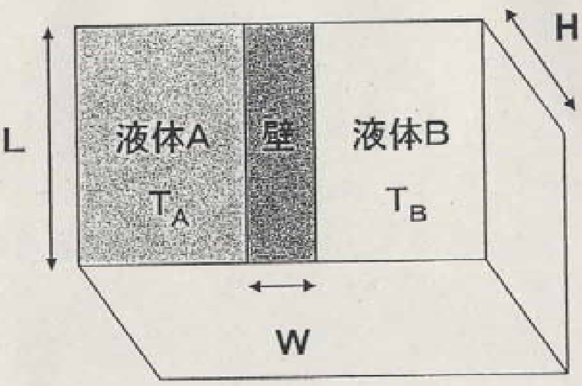


図　１

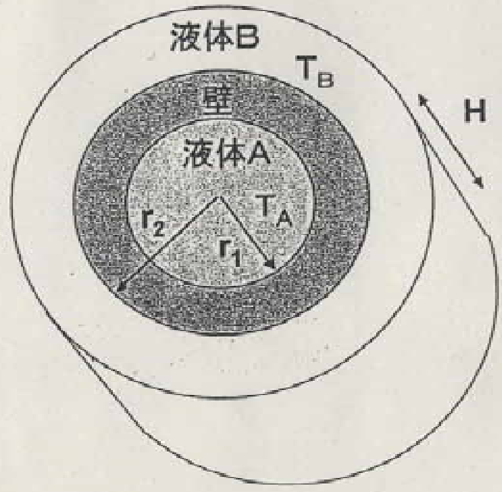


図　２

問題番号	工学Ａ － ２

図のような梁がある。Ａ点とＢ点の間に単位長さあたり w の一様な分布荷重が作用し、Ｃ点には集中荷重 P が作用している。AB 間および BC 間の距離はいずれも l とする。また、Ａ点、Ｂ点での反力をそれぞれ R_A、R_B とし、x 軸はＡ点を原点としてＢ点方向に正とする。

以下の問に答えよ。

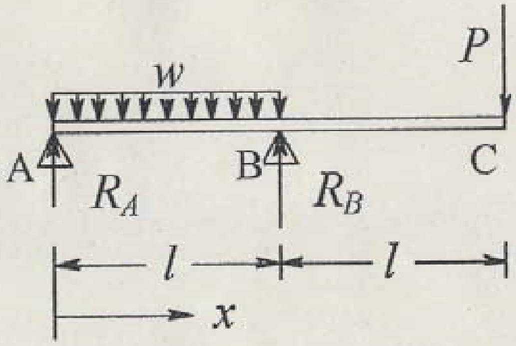


図　分布荷重と集中荷重を受ける梁

問１　力の釣合いの式、および Ａ 点まわりのモーメントの式を示し、R_A、R_B を P、w、l を用いて示せ。

問２　$0 \leqq x \leqq l$、$l \leqq x \leqq 2l$ の区間に分けて、モーメント（M）の分布を P、w、l を用いて x の関数として示せ。

問３　$0 \leqq x \leqq l$、$l \leqq x \leqq 2l$ の区間に分けて、たわみ角度（dy/dx）およびたわみ（y）を P、w、l を用いて x の関数として示せ。ただし、弾性係数を E、断面二次モーメント（慣性モーメント）を I とする。

問４　Ｃ点の変位が零となる時の P を、w と l を用いて示せ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	工学B － 1

人類の進歩はエネルギー源の確保とその利用に負うところが大きい。現在利用されているエネルギー源や将来その利用を期待されているエネルギー源を二つあげ、それらのエネルギー源とその利用について、次の４つの観点からそれらの特徴を簡潔に述べよ。

（１）原材料・資源量（どの程度の原材料が将来にわたって確保されているか。）

（２）供給エネルギー量（どれだけ供給することが可能か。どのような方法によるか。）

（３）環境問題（環境への影響はどのようなものがあるか。安全性はどうか。）

（４）経済性（生産効率、供給効率、環境対策なども含めて考えること。）

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	工学Ｂ　－　２

次のような直列共振回路がある。ここでＳ はスイッチ、E は電圧電源、R は抵抗、L は内部抵抗ゼロのインダクタンス、C はキャパシタンスで、初期電荷が Q_0（インダクタンス側が正電荷）である。

問１　$t=0$ でスイッチ Ｓを閉じた。回路に流れる電流を求めよ。

問２　$L=50\,\mu\mathrm{H}$, $C=20\,\mu\mathrm{F}$、 $Q_0=1\,\mathrm{mC}$ の場合の以下の値を求めよ。
ここで、初期電流はないとする。

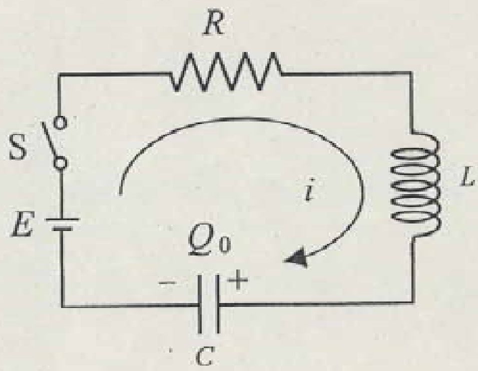
(a) 臨界減衰となる抵抗 R の値を求めよ。

(b) 抵抗 $R=0$ の場合には電流は減衰しない振動となる。その角周波数を求めよ。

(c) 応答電流が流れない場合の電圧の値を求めよ。

必要であれば、以下の逆ラプラス変換を用いよ。
ここで、$s=j\omega$（$j=$ 虚数単位、$\omega=$ 角周波数 ）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2+b^2}\right]=\frac{1}{b}e^{at}\sin bt,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right]=e^{at}\cos bt$$



総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	物理Ａ　－　１

以下の問いに答えよ。

問１　中心力($\boldsymbol{F} = f\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$)のもとで運動する質量$m$の質点の角運動量($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$)は、運動中一定に保たれることを示せ。ここで、$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$は時刻tでの質点の位置ベクトルと速度ベクトルであり、fはスカラー量で質点の位置及び速度の関数とする。

問２　中心力のもとで運動する質点は力の中心と初期位置および初速度ベクトルを含む平面内で運動することを示せ。また、平面内の２次元極座標(r, θ)を用いて、r方向、θ方向の運動方程式を求めよ。ここで、v_r, v_θを質量mの質点のr方向、θ方向の速度とする。

問３　ある時刻$t = t_0$に座標(r_0, θ_0)にあり速度(v_{r0}, $v_{\theta 0}$)を持つ質量mの質点が中心力$\boldsymbol{F} = f\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$を受けて運動しているとする。この時、質点の$r$方向の速度$v_r$は次式を満たすことを示せ。ただし、$f$は$r$のみの関数とする。

$$\frac{1}{2}m{v_r}^2 + \frac{{L_0}^2}{2mr^2} - \int_{r_0}^{r} f(r')dr' = E \qquad \left(\text{ここで、} L_0 = mr_0 v_{\theta 0},\ E = \frac{1}{2}m\left({v_{r0}}^2 + {v_{\theta 0}}^2\right)\right)$$

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	物理Ａ　－　２

質量m, 固有角振動数ωの１次元調和振動子のハミルトニアンは

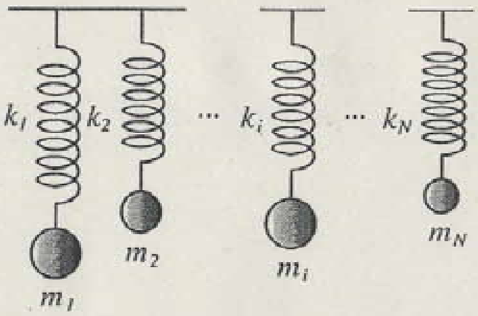
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

で与えられる。昇降演算子を$a^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)$, $a = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)$と定義する。$H$の$n$番目($n = 0,1,2,\cdots$)の規格化された固有状態を$|n\rangle$と表記すると、$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$が成り立つ。このとき以下の問いに答えよ。

問１　固有状態$|n\rangle$のエネルギー固有値はいくらか。

問２　固有状態$|n\rangle$のx, x^2, p, p^2の期待値をそれぞれ求めよ。ここでpは運動量である。

相互作用のない N 個のばね振り子からなる系を考える (図参照)。i 番目 $(1 \leq i \leq N)$ の重りの質量を m_i、ばね定数を k_i とし、重りに働くばねの力は、釣り合いの位置からの変位 x_i に比例するものとする。また、重りの運動は一次元的とする。この時、以下の設問に答えよ。



問１ x_i に共役な運動量を p_i とした時、この系全体のハミルトニアン H を書け。

問２ この系がカノニカル分布をする場合、分配関数 Z は、逆温度 β の関数として

$$Z = C\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_i \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \int_{-\infty}^{+\infty} dp_N \exp\left[-\beta H\right]$$

で与えられる (ここで C は定数とする)。この系における物理量 A の平均 $\langle A \rangle$ を

$$\langle A \rangle = \frac{C}{Z}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_i \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \int_{-\infty}^{+\infty} dp_N A \exp\left[-\beta H\right]$$

で定義する。この時、平均エネルギー $\langle E \rangle$ を、$\ln Z$ に対する微分操作の関数として表せ (ここで ln は自然対数とする)。さらに、それを用いて上述の系に対する $\langle E \rangle$ の具体的表記を求めよ。

問３ この系において、一振動子あたりの平均エネルギー $\langle E \rangle/N$ が平均的な運動エネルギー $(\langle E_k \rangle/N)$ とポテンシャルエネルギー $(\langle E_p \rangle/N)$ との間で等分配されることを示せ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１８年度１０月入学・平成１９年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	物理B　－　2

電流回路間にはたらく力について、以下の設問に答えよ。

問１ 無限に長い直線状の導線と半径 a の円形回路が同一平面 (x-y 平面) 内におかれている (図１参照)。直線状の導線は y 軸に沿っておかれているとし、また、円形回路の中心から導線までの距離を d とする ($d > a$)。直線状導線に y 軸の正の方向に電流 I_1 が、円形回路に電流 I_2 が、それぞれ定常的に流れている場合、円形回路に働く x および y 方向の力を、以下の手順に沿って求めよ。ただし、この空間における透磁率は μ_0 とする。

(i) 直線電流が円形回路上の点 P に作る磁場を求めよ。

(ii) 点 P での電流素片 $I_2 ds$ にはたらく x および y 方向の力を求めよ。

(iii) 円形回路全体にはたらく x および y 方向の力を求めると、

$$F_x = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{d - a\cos\theta}$$

および $F_y = 0$ となることを示せ。

問２ 次に、図２の様に円形回路を含む平面 (x-y 平面) に垂直におかれた直線状導体に定常電流 I_1 が z 軸の正の向きに流れている場合、電流 I_2 が定常に流れている円形回路全体にはたらく力の x、y、および z 方向成分を、問１の手順に沿って求めよ。その結果、この場合、円形回路全体にはたらく力はゼロとなり、x 軸まわりの回転を与える力のモーメントの大きさが下の式で与えられることを示せ。ここで、$r^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos\theta$ とする。

$$|N_x| = \frac{\mu_0 a^2 d I_1 I_2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^2} d\theta$$

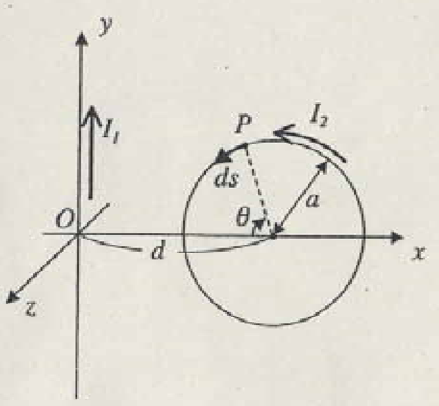


図１

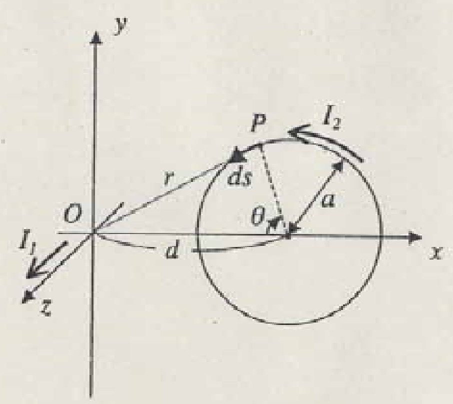


図２