総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成１９年度１０月入学・平成２０年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	数学　－　1

Legendre 関数 $P_l(x)$ $(l=0, 1, 2, 3, \ldots)$ は区間 $-1 \le x \le 1$ で定義される関数であり、$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$ を満たす完全直交系である。ここで、$l=m$ の場合 $\delta_{lm}=1$、$l \ne m$ の場合 $\delta_{lm}=0$ である。このとき以下の問いに答えよ。

問１　任意の関数 $f(x)$ を $f(x)=\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$ と展開するとき、展開係数 A_l を求めよ。

問２　任意の関数 $f(x)$ に対して $\int_{-1}^{1} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$　$(-1 \le a \le 1)$ を満たす関数 $\delta(x-a)$ を Legendre 関数で展開せよ。

問３　Legendre 関数は $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\right] + l(l+1)P_l(x) = 0$ を満たす。この性質を利用し、変数分離形を仮定して、偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right]$$

を初期条件 $f(x,t=0) = \delta(x-a)$　$(-1 \le a \le 1)$ の下で解け。

問題番号	数学　－　2

以下の問いに答えよ。

問１　$\exp(x)=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\cdots$であることを示せ。

問２　行列$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$の固有値$\alpha$、$\beta$を求めよ。

問３　上の行列Aに対して$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$となる行列$P$を求めよ。

問４　X、Yを行列とする。Yを問１で示した級数で
$Y=\exp(X)=E+X+X^2/2!+X^3/3!+\cdots$　　（Eは単位行列）
のように定義する。このとき上の行列Aに対して$\exp(A)$を求めよ。

問題番号	工学Ａ　－　１

熱力学に関する以下の問いに答えよ。答えの導出過程も示すこと。

問１　ある理想気体が体積 V のタンクに温度 T_1、圧力 P_1 の状態で入っている。この気体に熱量 Q を与えた時の圧力 P_2 を求めよ。ただし、この気体の気体定数を R、定容モル比熱を C_V とする。

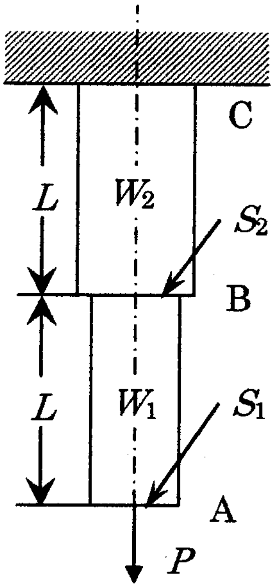
問２　可逆カルノーサイクルを行う熱機関が、高熱源温度 727 ℃、低熱源の温度が 122 ℃のとき、

（１）　1 サイクル当りの受熱量が 20.0 kJ とすれば、1 サイクルになされる正味仕事量はいくらになるか。

（２）　高熱源温度を変えずに同じ受熱量で 1 サイクルになされる正味仕事量を 13.0 kJ にするためには、低熱源への温度を何℃にすればよいか。

問題番号	工学Ａ　－　２

下図に示すように、長さ L、重量 W_1、W_2 の二つの部分 AB（断面積 S_1）と BC（断面積 S_2）で構成されている段付棒 AC を剛性天井から吊るし、その下端 A に鉛直荷重 P を作用させる。このとき、AB と BC に蓄えられる単位体積あたりの弾性エネルギーが等しいとすると、荷重 P、重量 W_1、W_2 との間に成り立つ関係式を示せ。ただし、AB 部分と BC 部分の材質は同じとする。



問題番号	工学Ｂ　－　１

1997 年 12 月に地球温暖化に関する京都議定書が合意され、日本は 2002 年に批准した。この議定書では主として以下の合意がなされた。

・2008 年から 2012 年までの期間内に、先進国全体で 1990 年比最低 5%の CO_2 排出削減。
・上記の期間内に、EU は 8%、アメリカ 7%、日本 6%の CO_2 排出削減。
・他の先進国も削減または抑制量の数値目標を設定する。
・途上国の削減義務は数値としては規定しない。
・国際的協調による目標達成の仕組みを導入する。

（出典　環境省ホームページ）

CO_2 排出削減を行うには種々の方策が考えられ、すでに実施されているものもある。新しいエネルギー源をも含め、エネルギー製造に関わる CO_2 排出削減方策を一つ、また、エネルギー製造とは直接関わりを持たないが CO_2 削減に有効であると考えられる方策を一つ挙げ、それぞれの方策の利点と欠点を論ぜよ。

問題番号	工学B － 2

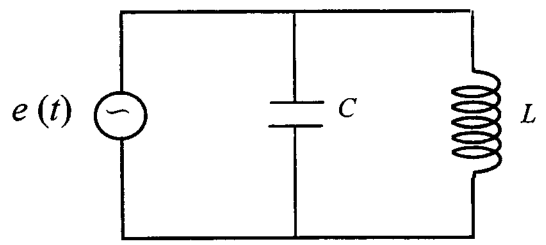
図の交流回路について以下の問いに答えよ。ただし、交流電源電圧 $e(t)$ は $e(t) = E\cos\omega t$ とする。

問１　インダクタンス L に流れる電流を求めよ。ただし、初期電流はないとする。

問２　インダクタンス L に蓄えられるエネルギー W_L を求めよ。

問３　キャパシタンス C に蓄えられるエネルギー W_C を求めよ。ただし、初期電荷はないとする。

問４　電源から回路に供給されるエネルギー $W_L + W_C$ が時間に無関係な一定値となるための周波数 ω を求めよ。また、その場合のエネルギー $W_L + W_C$ を求めよ。



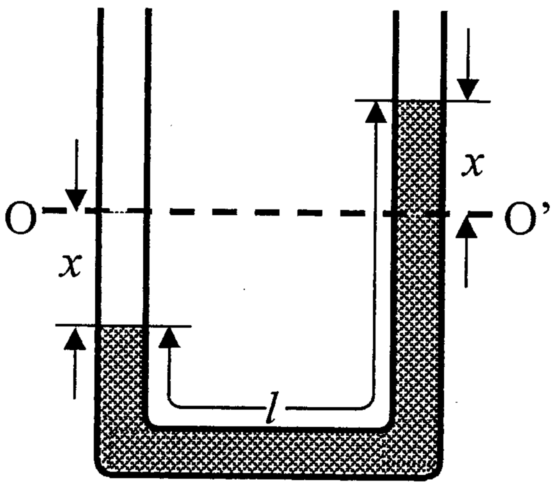
問題番号	物理Ａ － １

下図のような一様な断面積Sを持つＵ字管があり、その中に密度ρの液体が液柱の全長にしてlだけ入っているとする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、液体は非圧縮で粘性や摩擦力は無視できるとし、gを重力加速度とする。

問１ 釣り合いの状態における液面の位置を OO'とし、片方の管では OO'からxだけ液面が下がり、もう一方の管では OO'からxだけ液面が上がっているとする。釣り合いの状態から液面をxだけ下げるために必要な仕事量から、そのときの液柱の位置エネルギーを求めよ。

問２ 液体は同じ速さvで一様に動いているとして液柱の運動エネルギーを示せ。

問３ 液柱の運動エネルギーと位置エネルギーを使って液面の時間変化を表す方程式を導出し、液面は周期$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$の単振動をすることを示せ。



問題番号	物理Ａ　－　２

水素原子において電子の球対称な波動関数$\psi(r)$が Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\psi}{r}=E\psi \qquad (1)$$

によって与えられるものとする。ここで、Eはエネルギー固有値、μは換算質量である。$r=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}\rho$、$E=\frac{\mu}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\beta$とおくと、方程式(1)は

$$\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho\psi)=-\left(\beta+\frac{2}{\rho}\right)\rho\psi \qquad (2)$$

となる。このとき、以下の問いに答えよ。

問１　$\rho\psi(\rho)=e^{-\alpha\rho}g(\rho)$、$\alpha^2=-\beta>0$とおくと、方程式(2)が

$$\frac{d^2}{d\rho^2}g-2\alpha\frac{dg}{d\rho}+\frac{2}{\rho}g=0 \qquad (3)$$

となることを示せ。

問２　$g(\rho)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\rho^k$と展開して、方程式(3)の解において$b_{k+1}$と$b_k$が満たすべき関係式を求めよ。

問３　主量子数n（正の整数）の束縛電子の解においては、$n+1$番目以降の展開係数が０となる。つまり、$b_k=0\quad(k\geq n+1)$である。このときαをnで表し、主量子数nのエネルギー固有値E_nを求めよ。

問題番号	物理 B － 1

相互作用のない古典的、かつ、非相対論的な運動をする多数の質点からなる気体を考え、その 1 体分布関数が $f(x,v,t)$ で与えられているとする。ここで、座標空間 x、速度空間 v はそれぞれ 1 次元の系を考える $(-\infty < x < +\infty)$。以下の問いに答えよ。

問 1 $f(x,v,t)$ の時間発展は、保存則

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vf) = 0 \tag{1}$$

にしたがうものとする。$f(x,v,t)$ の初期条件が $f(x,v,t=0) = g(x,v)$ で与えられる場合、式 (1) の一般解を求めよ。

問 2 気体の流速分布を $U(x,t)$ として、式 (1) から気体の数密度分布 $n(x,t)$ の時間発展を記述する連続の式を導け。

問 3 時刻 $t = 0$ において、初期分布が $f(x,v,t=0) = n_0 F_0(v) h(x)$ で与えられるものとする。ここで、気体の平均数密度 n_0 は一定であり、また、

$$F_0(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2v_0}, & |v| \leq v_0 \text{の場合} \\ 0, & |v| > v_0 \text{の場合} \end{cases}$$

および、$h(x) = 1 + C \sin kx$ とする。さらに、$v_0 > 0$、$|C| < 1$、および k は実定数とする。この場合、時刻 t における気体の数密度分布 $n(x,t)$ を求めよ。

問 4 上記問 3 と同じ初期数密度分布 $n(x,t=0) = n_0(1 + C \sin kx)$ に対して、拡散方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{2}$$

が与える数密度の時間発展を、変数分離法を利用して求めよ。さらに、数密度の時間発展について、この解と上記の問 3 で得られた解との相違点を述べよ。ただし式 (2) において、拡散係数 $D > 0$ は実定数とする。

半径aの誘電体球を真空中で一様な電場の中におけば、球付近で電場は変化する。この変化を以下に従って求めよ。ただし、誘電体球及び真空の誘電率は、ε_*、ε_0とする。座標系は球座標注) を用いる(誘電体球の中心を原点におく)。また、一様な電場（E_0）の方向をz軸にとると、静電ポテンシャルは、球の外では、

$$\Phi_1 = -E_0 z + \frac{Az}{r^3} \qquad (r \geq a) \qquad (1)$$

で与えられ、球の内側では、

$$\Phi_2 = Bz \qquad (r \leq a) \qquad (2)$$

で与えられるとする。ここで、$z = r\cos\theta$ で、A、Bは定数である。

問１　$\Delta\Phi_1 = 0$、$\Delta\Phi_2 = 0$を満たしていることを示せ。

問２　$r = a$で満たすべき境界条件が２つあるが、それらを示せ。

問３（１）、（２）の式で静電ポテンシャルの関数形を仮定しているが、A、Bがある値のとき境界条件が完全に満たされているので解であることがわかる。その時のA、Bを求めよ。

問４　以上の結果から誘電体球内の電場は、E_0より小さいことを示せ（$\varepsilon_* > \varepsilon_0$）。

注) 直角座標系と球座標系の関係については以下の通りとなる（この問題では、対称性より $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$）。

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)$$