総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２０年度１０月入学・平成２１年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

| 問題番号 | 数学　ー　1 |
| --- | --- |

以下の問いに答えよ。ただし、$f''=\dfrac{d^2 f}{dx^2}$、$f'=\dfrac{df}{dx}$ である。

問1 常微分方程式 $x^2u''+xu'-u=0$ の一般解を示せ。

問2 $x$ の関数 $f(x)$ が、常微分方程式 $u''+\left(q(x)-\dfrac{p'(x)}{p(x)}\right)u'+p(x)r(x)u=0$ の解 $u$ を用いて $f(x)=\dfrac{1}{p(x)}\dfrac{u'}{u}$ と表せるとき、$y=f(x)$ は常微分方程式 $y'+p(x)y^2+q(x)y+r(x)=0$ の解であることを示せ。

問3 問1、問2の結果を使って、常微分方程式 $x^2\left(y'+y^2\right)+xy-1=0$ の解を求めよ。

| 問題番号 | 数学　－　2 |
|---|---|

以下の問いに答えよ。

問 1　$n, m$ をゼロでない整数とする。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \pi\delta_{nm},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \pi\delta_{nm}$$

を示せ。ここで $\delta_{nm}$ は

$$\begin{cases} \delta_{nm} = 0, & (n \neq m) \\ \delta_{nm} = 1, & (n = m) \end{cases}$$

とする。

問 2　定義域 $(-\pi \leq x \leq \pi)$ で定義される周期関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

のようにフーリエ級数に展開する。係数 $a_0, a_n, b_n$ を $f(x)$ を用いて示せ。

問 3　$f(x) = x^2$ をフーリエ級数に展開せよ。同様に $f(x) = x^4$ のフーリエ級数展開を求めよ。定義域を $(-\pi \leq x \leq \pi)$ とする。

問 4　上記のフーリエ級数を利用して

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

および

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

を示せ。

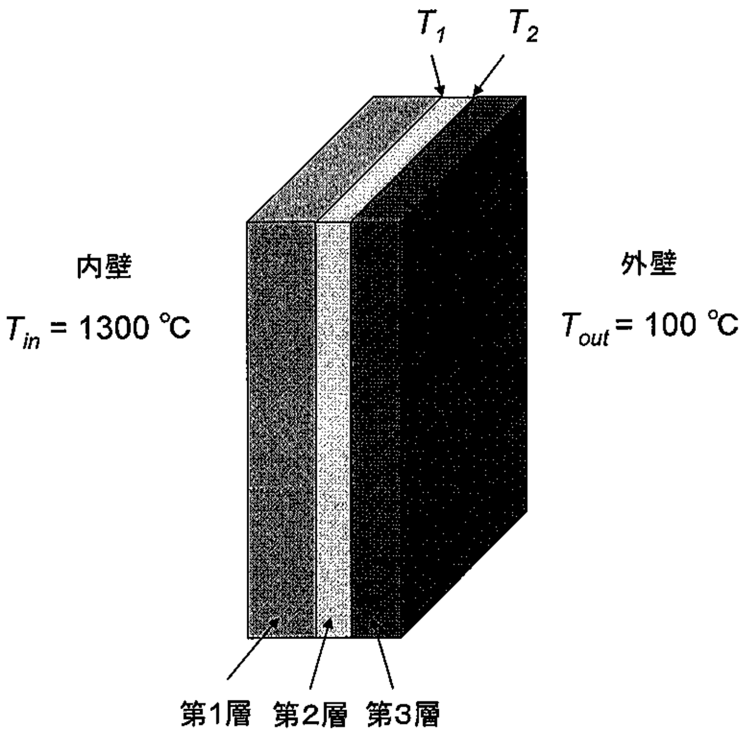
| 問題番号 | 工学Ａ　－　１ |
| --- | --- |

3 層からなる平面耐火炉壁で内壁が 1300℃、外壁が 100℃に保たれている。内側から順に第 1、第 2、第 3 層と定義し、厚さは順に 0.65m、0.28m、0.30m、熱伝導率 ($Wm^{-1}K^{-1}$) は順に 1.3, 0.20, 0.60 である。このとき以下の問いに答えよ。

問１　第１層と第２層の間の接触面温度 $T_1$、第２層と第３層の接触面温度 $T_2$ を求めよ。

問２　この３層からなる平面炉壁の平均熱伝導率を求めよ。

問３　第３層のみ厚さを変えて、同じ伝導熱量で外壁を 50℃に保つ場合、第３層の厚さを求めよ。



| 問題番号 | 工学Ａ － ２ |
|---|---|

十分大きい容積を持つタンクに詰められたガス（圧力 $p_0$，密度 $\rho_0$，温度 $T_0$）が、断熱的にノズルを通して圧力 $p_1$ の外部に流出している。このとき、下の問いに答えよ。ただし、ガスは粘性のない理想気体の1次元流とする。

問１　外部へ流出するガスの速度 $u_1$ が下式で表されることを示せ。なお、断熱変化では、$\gamma$ を比熱比とすると $p\rho^{-\gamma} = const.$ が成り立つ。

$$u_1 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right)}$$

問２　外部の圧力 $p_1$ がタンク内の圧力 $p_0$ に等しいとき、ガスの流出速度 $u_1$ はゼロであるが、外部の圧力 $p_1$ を減少させるにつれてガスの流出速度 $u_1$ は増加し、やがて音速に達する。この流速が音速に等しい状態を臨界状態（圧力 $p^*$、流速 $u^*$）という。外部の圧力が $p^*$ よりも低くなると、上式は成り立たなくなり、外部の圧力によらずガス流出速度は $u^*$ で一定となる。臨界圧力 $p^*$ とタンク内圧力 $p_0$ の比を求めよ。

| 問題番号 | 工学Ｂ　－　１ |
|---|---|

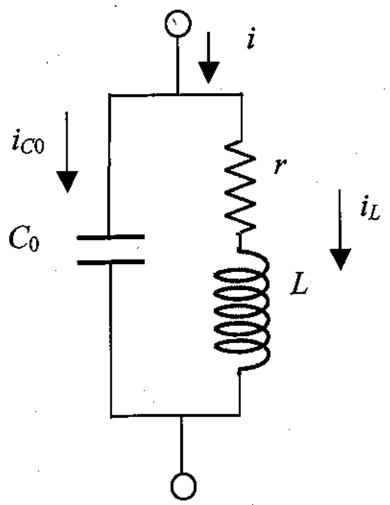
コイルを製作したとき、インダクタンス $L$ のほかに抵抗 $r$ と浮遊容量 $C_0$ が存在する。その等価回路は下図のように表される。この回路に交流電源電圧 $e(t)=E\cos\omega t$ を印加した場合ついて以下の問いに答えよ。

問１　浮遊容量 $C_0$ に流れる電流 $i_{C0}$ を求めよ。ただし、初期電荷はないとする。

問２　インダクタンス $L$ に流れる電流 $i_L$ を求めよ。ただし、初期電流はないとする。

問３　回路に流れる全電流 $i$ が電源電圧と同位相になる電源周波数 $\omega_r$（共振角周波数）を求めよ。

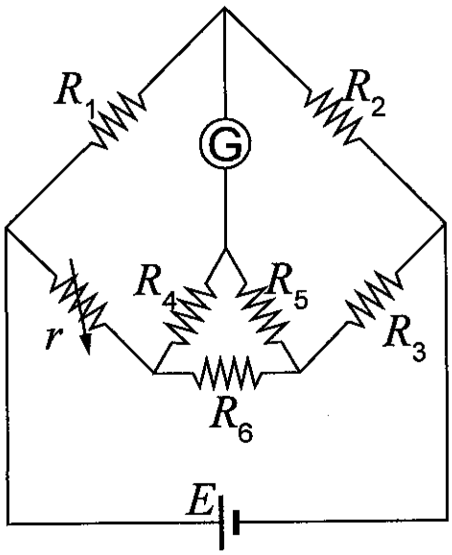
問４　未知の浮遊容量 $C_0$ を求めるために、回路に並列に可変コンデンサを接続した。可変コンデンサの静電容量が $C_1$ および $C_2$ のときの共振周波数がそれぞれ $\omega_1$ および $\omega_2$ であった。抵抗 $r$ は十分小さくて無視できるとして、浮遊容量 $C_0$ の値を $C_1, C_2, \omega_1, \omega_2$ を用いて表せ。



総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２０年度１０月入学・平成２１年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

| 問題番号 | 工学Ｂ　－　２ |
| --- | --- |

右のブリッジ回路において、ゼロでない電圧$E$を印加したとき、可変抵抗$r$を調整して検流計Gに電流が流れないようにした。このとき、下の問いに答えよ。




問１　可変抵抗$r$の値を他の抵抗（$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$）の値を用いて表せ。

問２　$R_6$の値に依らず検流計Gに電流が流れない条件を示せ。

| 問題番号 | 物理Ａ　－　１ |
|---|---|

下図のような半径 $a$ の円に対するサイクロイド曲線A$X_0$Bが鉛直面内にあり、そのサイクロイド曲線上を滑らかに束縛された質点Pが運動している。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、サイクロイド曲線とは、定直線に沿って円が滑らずに回転するときの円周上の定点の軌跡である。また、摩擦力は無視できるとし、重力の方向は $y$ 方向で重力加速度を $g$ とする。

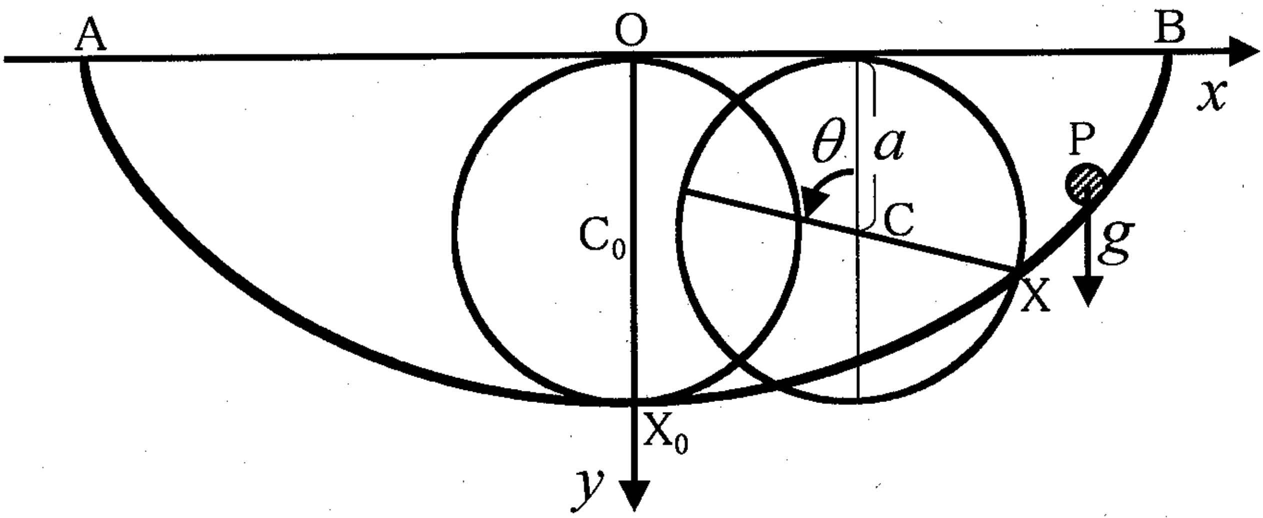
問1 下図のような $x-y$ 座標系を考え、変数 $\theta$ を下図のようにとるとき、サイクロイド曲線を表す式を $x$、$y$、$a$、$\theta$ を用いて示せ。ただし、下図で、円Cは円$C_0$が $x$ 軸に沿って滑らずに回転したもので、このとき、円$C_0$の最下点$X_0$が移動した先がXである。

問2 サイクロイド曲線の最下点 $X_0$ からサイクロイド曲線上の点 X までのサイクロイド曲線に沿った距離 $s$ を $a$、$\theta$ を使って表せ。ここで、$s$ は$X_0$からBに向かう方向を正とする。

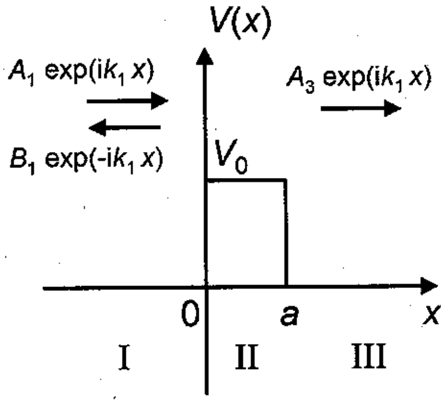
問3 質点Pがサイクロイド曲線上のXにあるとき、質点の鉛直方向( $y$ 方向)の速度 $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ を質点のサイクロイド曲線に沿った速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ を使って表せ。

問4 問2と問3の結果を使って質点Pの運動を表す $s$ に関する微分方程式を導出せよ。

また、質点Pは周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{4a}{g}}$ の単振動をすることを示せ。



| 問題番号 | 物理Ａ　－　２ |
|---|---|




質量 $m$ の粒子が、$x$-軸上を $x<0$ 側の無限遠から $V(x)$ で表されるポテンシャル壁に向かって飛んでくる場合を考える。$V(x)$ は

$$V(x)=\begin{cases} 0 & (\text{領域I}: x<0) \\ V_0 & (\text{領域II}: 0\le x\le a) \\ 0 & (\text{領域III}: x>a) \end{cases}$$

で与えられる。ただし、$V_0>0$、$a>0$ とする。

エネルギー $E$ ($E>V_0$ とする) を持つ粒子に対する定常状態のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{d^2u(x)}{dx^2}+V(x)u(x)=Eu(x)$$

の解として、領域I、II および III における粒子の波動関数をそれぞれ

$$\begin{aligned} u_1(x) &= A_1\exp(ik_1x)+B_1\exp(-ik_1x) && (x<0) \\ u_2(x) &= A_2\exp(ik_2x)+B_2\exp(-ik_2x) && (0\le x\le a) \\ u_3(x) &= A_3\exp(ik_1x) && (x>a) \end{aligned}$$

により表す。ここで $k_1>0$ とする。ただし $E=\hbar^2k_1^2/(2m)=\hbar^2k_2^2/(2m)+V_0$ の関係が成り立つ。$A_1\exp(ik_1x)$、$B_1\exp(-ik_1x)$ および $A_3\exp(ik_1x)$ はそれぞれ粒子の入射、反射および透過を表し、粒子の反射係数 $R$ および 透過係数 $T$ はそれぞれ $R=|B_1/A_1|^2$ および $T=|A_3/A_1|^2$ によって定義される。

問１ $B_1/A_1$ および $A_3/A_1$ を $k_1$、$k_2$ および $a$ を用いて表せ。

問２ 反射係数 $R=|B_1/A_1|^2$ および透過係数 $T=|A_3/A_1|^2$ を $k_1$、$k_2$ および $a$ を用いて表せ。

問３ $R+T$ の値はいくらか。

問４ 粒子が反射されず、全て透過するための条件を、$k_2$ と $a$ を用いて表せ。

| 問題番号 | 物理Ｂ　－　１ |
|---|---|

空間一様かつ等方的な媒質中での電場$\boldsymbol{E}$および磁束密度$\boldsymbol{B}$についてのマックスウェル方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\left(\boldsymbol{j} + \epsilon \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

に関して以下の問いに答えよ。ここで、媒質の誘電率、透磁率をそれぞれ、$\epsilon$、$\mu$とし、いずれも定数とする。ただし、媒質は電気的に中性(電荷密度はゼロ)とする。

問1　電流密度$\boldsymbol{j}$についてオーム則 $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ が成り立つものとして、マックスウェル方程式から電場$\boldsymbol{E}$についての２階偏微分方程式を導出せよ。ここで、導電率$\sigma$は定数とする。

問2　導電率$\sigma = 0$ の場合について、問１で得られた方程式が波動方程式に帰着することを示し、その式が与える位相速度の大きさを求めよ。

問3　問１の場合において（導電率$\sigma \neq 0$)、平面波 $\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 \exp(ikz - i\omega t)$ を考える。ここで、$\boldsymbol{E}_0$は$z$軸に直交しているものとする。この時、$k$を$\omega$の関数として、両者の関係（分散関係式）を求めよ。

問4　問３の場合において、$\omega$を実数とし、$k$の実部と虚部を求めよ。

問5　問４の結果を使って、$\epsilon\omega \ll \sigma$という近似のもとに、$|\boldsymbol{E}|$が$1/e$に減衰するまでに波が進む距離を求めよ。ここで、$e$は自然対数の底を表す。

| 問題番号 | 物理Ｂ　－　２ |
|---|---|

状態方程式

$$PV = nRT \tag{1}$$

にしたがう$n$モルの理想気体について、以下の問いに答えよ。ここで、$P$、$V$、$R$、$T$はそれぞれ、圧力、体積、気体定数、温度を表す。

問１　熱力学第１法則

$$d'Q = dU + PdV \tag{2}$$

から（ここで$d'$は不完全微分を表す）、関係式

$$C_P = C_V + nR \tag{3}$$

を導け。ここで、$U$は内部エネルギー、$C_P$は定圧比熱、$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V$は定積比熱をそれぞれ表す。

問2　式(1) - (3)を用いて、理想気体の準静的断熱変化において

$$PV^\gamma = const. \tag{4}$$

が成り立つことを示せ。ここで比熱比 $\gamma = C_P/C_V$ は定数とする。

問3　問２の準静的断熱変化において、気体の温度が$T_1$から$T_2$へと変わった。このとき、気体が外部になした仕事を求めよ。

問4　理想気体のエントロピーを$S$としたとき、

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \quad , \quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \tag{5}$$

と表わされる。これらから、マックスウェルの関係式$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$を用いて(3)式を導出せよ。