

$0 \leq x \leq \pi$ で定義される実関数 $y(x)$ が、実数 λ に対する微分方程式、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (\text{A})$$

を満たすものとする。このとき、境界条件

$$\begin{cases} y(x=0) = 0 \\ y(x=\pi) = 0 \end{cases} \quad (\text{B})$$

の下での固有値及び固有関数を次の手順に従って求めよ。

(1)

$\lambda > 0$ 、 $\lambda = 0$ 、 $\lambda < 0$ のそれぞれの場合に対して、(A) の一般解を求めよ。

(2)

(B) の境界条件を満たす解において、 $y(x) = 0$ 以外の解を持つための条件から、固有値 λ を求めよ。

(3)

(2) で求めた固有値に対応する固有関数を示せ。ただし、

$$\int_0^\pi y^2 dx = 1$$

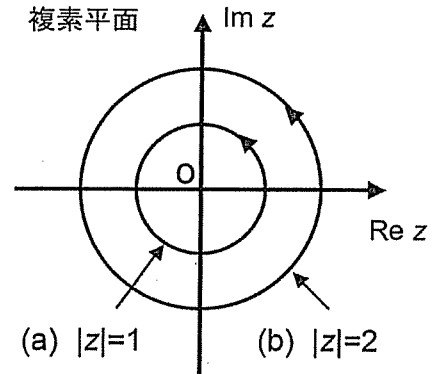
を満たすように規格化定数を決定せよ。

以下の問いに答えよ。

問1 次の複素関数の積分の値をそれぞれ求めよ。ただし複素 z 平面上の積分経路の向きは右図に示した円周上の矢印の向きにとる。

(a)
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz$$

(b)
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$$



問2 次の積分の値を求めよ。ただし $a > 1$ とする。(ヒント: $z = e^{i\theta}$ とおき、複素関数の積分に書き換え、留数の計算を行う。)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$$

問3 複素関数の積分

$$\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} \frac{dz}{z} \quad (n \text{ は } 1 \text{ 以上の整数})$$

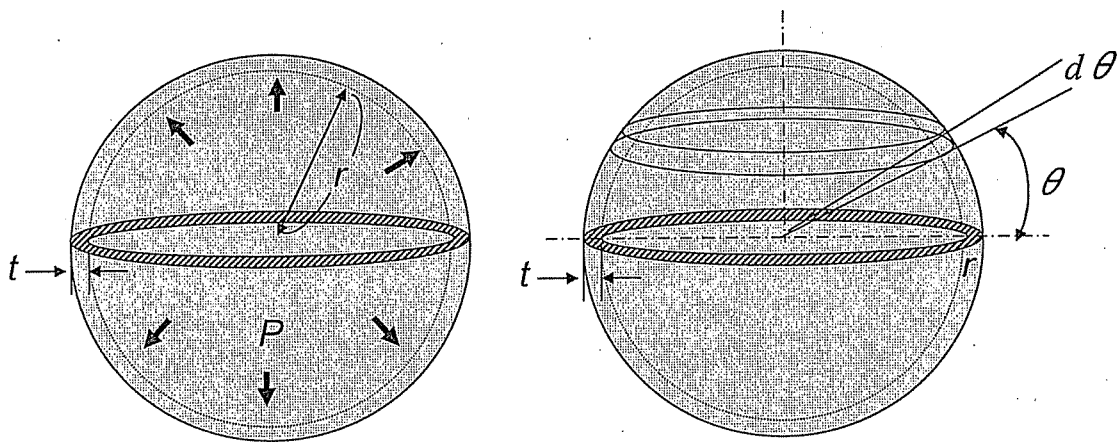
を求めることにより、

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

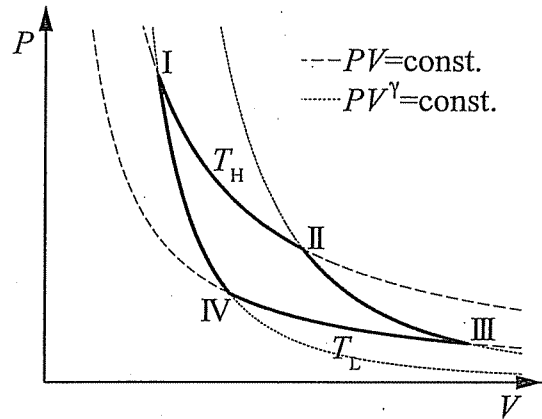
を証明せよ。

図のように内圧 P を受けた半径 r 厚さ t の薄肉球の、円周方向の主応力 σ を考える。球殻上半分の力の釣り合いについて以下の問いに答えよ。なお、 r に比べ t は十分小さく、壁面は平面応力状態であるとする。

- 問1 球殻上下断面（図の斜線で表わす面）の下向きの力の和を σ と t を用いて示せ。
- 問2 図の $\theta \sim \theta + d\theta$ の範囲にある球殻部分の上向きの力の和を式で表せ。
- 問3 上の式を 0 から $\pi/2$ まで積分することにより、球殻上半分の上向きの力の和を求めよ。
- 問4 問1、問3で求めたそれぞれの力の和が等しいとして、 σ を P, r, t で表せ。



右図は二つの熱源の間で理想気体を作業物質として準静的に働く熱機関のPV線図である。この熱機関に関する下記の問題に答えよ。ただし、高温熱源および低温熱源の温度は T_H および T_L とする。 γ は比熱比とする。



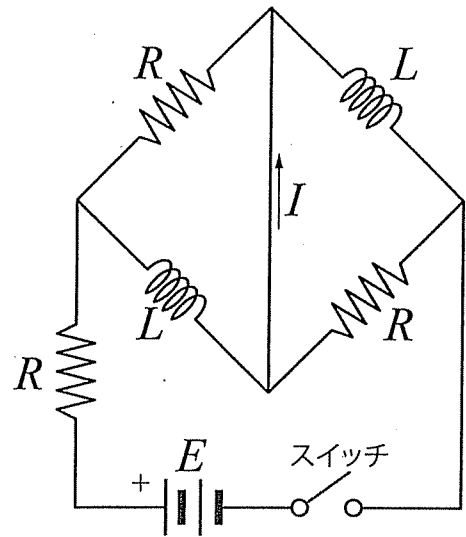
- (1) この熱機関の名称を示せ。
- (2) この熱機関を構成する四つの過程を説明するとともに、各過程における内部エネルギー変化および授受する熱量を示せ。
- (3) この熱機関の熱効率 η （高温熱源から受け取った熱量に対する外部に行う仕事の割合）が下式で表されることを示せ。

$$\eta = \frac{T_H - T_L}{T_H}$$

- (4) 高温熱源温度を 275°C 、低温熱源を 110°C とした時、この熱機関の熱効率を求めよ。
- (5) (4)の条件において、1サイクルあたりの受熱量を 15 kJ としたときの、1サイクル中に外部へ行われる仕事量を求めよ。

抵抗 R ，自己インダクタンス L ，直流電源 E およびスイッチを用いて構成した右図の様なインピーダンスブリッジ回路において，スイッチを閉じた後にブリッジ部に流れる電流 I を時間の関数として求めよ．また，その時間変化を図示せよ．

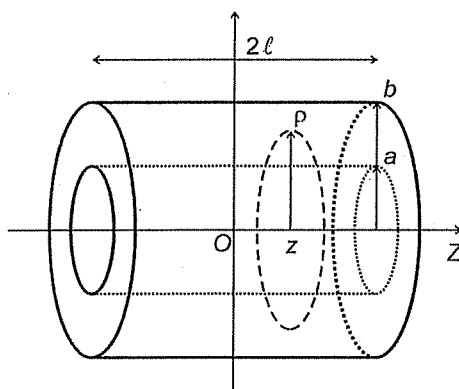
ただし，導線のインピーダンスは無視できるものとする．



図に示すように、内半径 a 、外半径 b 、長さ 2ℓ で密に巻かれたソレノイドコイルに電流密度 J で電流が流れている場合に、次の問いに答えよ。答えの導出過程も示すこと。ただし、以下において、 μ_0 は真空の透磁率である。

問1 無限長ソレノイドコイル ($\ell = \infty$) の場合に、コイル内部における磁場が、 $B = \mu_0 J(b - a)$ で表せることを示せ。

問2 有限長ソレノイドコイル ($\ell \neq \infty$) において、ソレノイドコイル内の微小要素に流れる電流 ΔI を考える。微小要素の中心軸からの半径を ρ 、コイル中心から軸方向への位置を z とする場合、この電流がコイル中心 (図の原点 O) においてコイル軸方向 (Z 方向) に作る磁場が、次式で表されることを示せ。



$$B = \frac{\mu_0}{2} \Delta I \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

ただし、ビオサバールの法則 $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \Delta I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}$ を用いると良い。ここで、電流要素上のコイル周方向に沿う微小部分を $d\mathbf{s}$ 、その部分から原点 O を見た位置ベクトルを \mathbf{r} とし、それが中心に作る磁場を $d\mathbf{B}$ としている。

問3 上記をもとに、コイル中心 (図の原点 O) におけるコイル軸方向 (Z 方向) の磁場が次式で表されることを示せ。

$$B = \mu_0 J \ell \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + \ell^2}}{a + \sqrt{a^2 + \ell^2}}$$

ただし、 $\int dx / (u^2 + x^2)$ の積分には、 $x = u \tan y$ の変数変換を用いると良い。

また、以下の数学公式を用いると良い。 $\int dt / \sqrt{1+t^2} = \ln |t + \sqrt{1+t^2}|$

質量、速度がそれぞれ m_1 、 v_1 の粒子1と m_2 、 v_2 の粒子2が運動している。以下の問いに答えよ。

問1 粒子1と粒子2、それぞれの運動量 p_1 、 p_2 を、粒子の質量、重心の速度、相対速度、換算質量を用いて表せ。ここで重心の速度、相対速度、換算質量を、それぞれ V_G 、 $v_r = v_1 - v_2$ 、 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ とする。

問2 同様に、運動エネルギー E_1 、 E_2 、系の全エネルギー E を表せ。

問3 粒子1と粒子2が衝突した。粒子が内部構造を持つとして非弾性衝突として失われる最大のエネルギーを求めよ。

問4 静止している水素原子に 170 eV の酸素原子が衝突した。重心の運動エネルギーと相対運動のエネルギーを求めよ。この衝突によって水素原子がイオン化する可能性について論じなさい。水素のイオン化（束縛の）エネルギーは 13.6 eV とする。また、水素と酸素の質量比は 1:16 とする。

電子はスピンと呼ばれる内部角運動量をもっている。スピン角運動量ベクトルを $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ で表すと、単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ で表される任意の方向の \mathbf{s} の成分 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ は固有値 $+1/2$ 、 $-1/2$ をもつ (ここでは簡単のため $\hbar = 1$ とする)。パウリのスピン行列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いると、 \mathbf{s} を $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} = (\frac{1}{2}\sigma_x, \frac{1}{2}\sigma_y, \frac{1}{2}\sigma_z)$ によって表すことができる。このとき、 z -方向のスピン $s_z = \frac{1}{2}\sigma_z$ の固有値 $+1/2$ および $-1/2$ に対応する固有ベクトルは、それぞれ、

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

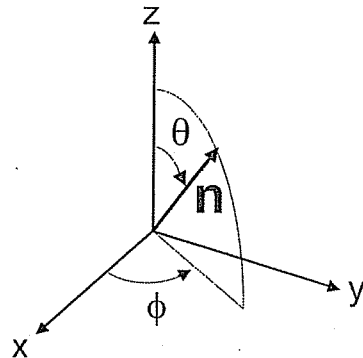
で与えられる。

問1 球座標 (右図参照) の2つの角変数 θ および ϕ を用いて、方向を表す単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ を書き表せ。

問2 スピン角運動量 \mathbf{s} の \mathbf{n} 方向の成分

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = s_x n_x + s_y n_y + s_z n_z$$

を θ および ϕ を用いて 2×2 行列の形で表せ。



問3 スピン角運動量 \mathbf{s} の \mathbf{n} 方向の成分 $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$ の固有値 $+1/2$ に対応する固有ベクトル

$$\chi_{\mathbf{n}} = a\chi_+ + b\chi_- = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を求めよ。ただし、規格化条件 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ が満足されているとする。

問4 $\chi_{\mathbf{n}}$ で表される状態における s_x 、 s_y および s_z の期待値をそれぞれ求めよ。

理想気体の熱力学について考える。気体の圧力を p 、気体 1 モルあたりの比体積を v 、密度を $\rho = 1/v$ 、温度を T 、内部エネルギーを e 、エントロピーを s 、エンタルピーを $h = e + pv$ とする。理想気体の状態方程式は $pv = RT$ で与えられる。ここで R は気体定数である。また、熱力学第一法則は

$$\delta Q - pdv = de$$

と表現される。ここで δQ は外部から与えられる熱量であり、可逆過程では $\delta Q = Tds$ と書ける。以下では e や h が温度 T だけの関数である気体（これを熱的に完全な気体と呼ぶこともある）を考える。この時、定圧比熱 $C_p = (\partial h / \partial T)_p$ 、定積比熱 $C_v = (\partial e / \partial T)_v$ を用いて $dh = C_p dT$ 、 $de = C_v dT$ と書ける。これらを用いて、以下の問いに答えよ。

- (1) 可逆過程で気体の状態が状態 1 (p_1, T_1) から状態 2 (p_2, T_2) へと移ったとき、エントロピーの変化が

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

で与えられることを示せ。

- (2) (1)の過程を比体積と温度で記述する。状態 1 (v_1, T_1) から状態 2 (v_2, T_2) へ移ったときのエントロピーの変化が、比体積と定積比熱を用いて、

$$s_2 - s_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

であることを示せ。

- (3) 断熱的かつ可逆過程を考える。圧力と密度の間に関係式

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma$$

が成立することを示せ。ここで $\gamma = C_p / C_v$ である。

以下の問に答えよ。

(1) 図1に示すように、円形断面かつ十分に長い鉄心がある。鉄心からの磁場 \vec{B} の漏れは無視出来るものとする。鉄心の磁束 Ψ を時間的に増加させた時に誘起される電場の向きと大きさを、鉄心の中心からの距離 r の関数として求めよ。距離 r は鉄心の半径よりも大きいとする。

次に、図2に示すように円環（ドーナツ）状のパイプ（以後、円環と言う）を、鉄心を囲むように置いたとする。円環の主軸は鉄心の中心軸に沿っている。この状況下で(1)と同じく鉄心の磁束を増加させる。円環の電気伝導度を無限大とし、且つそのインダクタンスを L とする。この時、

- (2) 円環上の電場はどのようなになるか、理由を付して述べよ。
- (3) 円環上に流れる電流と鉄心の磁束との関係を求めよ。

