総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２２年度１０月入学・平成２３年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	数　学　－　1

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような行列 C を求めよ。

(3)

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

と定義して、e^A を計算せよ。ここで I は単位行列とする。

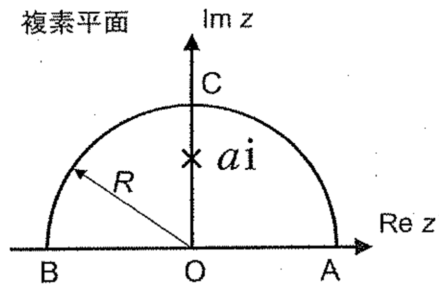
問題番号	数　学　－　2

以下の問いに答えよ。

問１ 次の積分の値を求めよ。ただし、a は実数であり、$a>0$ とする。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$$

(ヒント： 右図のような複素平面上の原点を中心とする半径 R の半円の周囲 BOACB に沿って、複素関数 $e^{iz}/(z^2+a^2)$ の積分を求め、$R\to\infty$ の極限を考える。)



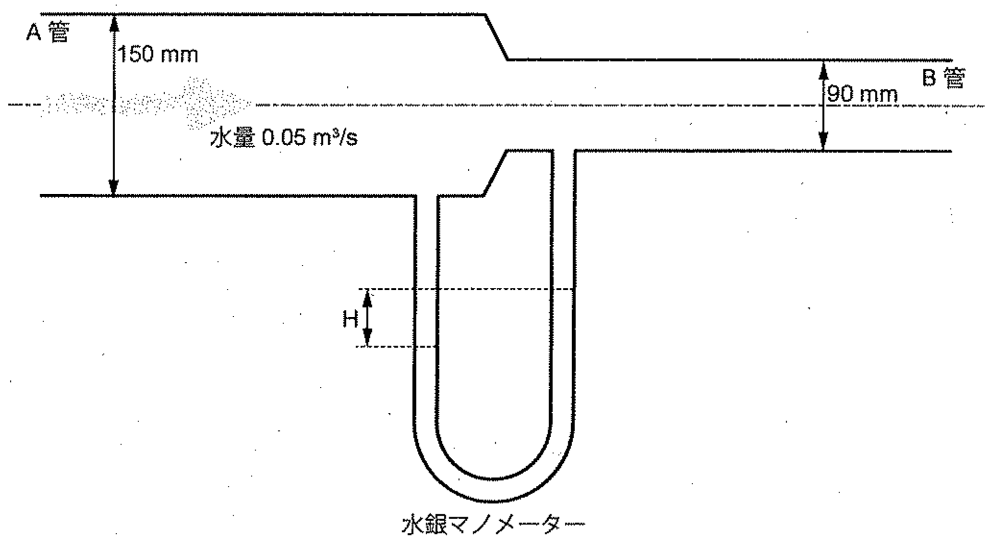
問２ 次の積分の値を求めよ。ただし a および b は実数であり、$a>b>0$ とする。
(ヒント： $z=e^{i\theta}$ とおき、複素関数の積分に書き換え、留数の計算を行う。)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$$

問題番号	工 学 Ａ － １

図の様に，途中で内径が150 mm（A管）から90 mm（B管）に変化する円管を水平におき，流量V=0.05 m^3/sの水（比重1.0）を流した．以下の問に答えよ．ただし，流れは非圧縮性の定常流であり，理想状態を仮定する．なお，重力加速度は9.8 m/s^2とする．

(1) A管およびB管における平均流速を求めよ．
(2) A管とB管の間の圧力差を求めよ．
(3) A管とB管の間に設置した水銀マノメータの高低差Hを求めよ． ただし，水銀の比重は13.6とする．



問題番号	工学Ａ－２

（１） 外部から仕事 W を供給することにより、絶対温度 T_L の低温熱源から熱 Q_L を取り去り、温度 T_H の高温熱源へ熱 Q_H をくみ上げる冷凍機を考える。

この冷凍機の熱効率を示す動作係数（Coefficient of Performance: COP）ε_R は、

$\varepsilon_R = \dfrac{Q_L}{W} = \dfrac{Q_L}{Q_H - Q_L}$ で表される。

冷凍機が理想的なサイクルである逆カルノーサイクルである場合の理論最大動作係数 $\varepsilon_{R,Carnot}$ を低温、および、高温熱源の絶対温度 T_L、および T_H の関数として表せ。

（２） 逆カルノーサイクルで動作する理想的な冷凍機（エアコン）で部屋を冷房することを考える。外気温度が摂氏 35 ℃の時に、室内の温度を常に 28 ℃に保つようにしたい。このエアコンを動作させるための必要最小動力を求めよ。ただし、外から室内への熱侵入量は 3 kW であるとする。ここで、絶対零度は－273 ℃とする。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２２年度１０月入学・平成２３年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	工 学 B － 1

図１のように２個のコイル（インダクタンスはともにL）と２個の抵抗（抵抗値はともにR）、および、１個の電源で構成された電気回路を考えるとき、以下の問いに答えよ。答えの導出過程も示すこと。ただし、回路の中で図示していないインピーダンスは考えないものとする。

問１　図１において、初期には回路に電流は流れていないものとする。今、電源を用いて通電を行ったとき、２個のコイルの中点と２個の抵抗の中点の間を流れる電流 i は、電源の出力電流 I の値や時間変化によらず常にゼロであることを示せ。

問２　電源の出力電流が I に固定された定常状態における通電中、時刻 $t=0$ において、コイル①で抵抗 r が発生したとする（図２）。ただし、電源の出力電流 I は、抵抗 r の発生後も常に一定に制御されているものとする。このとき、２個のコイルの中点と２個の抵抗の中点の間を流れる電流 i を時刻 t の関数として表せ。また、十分に時間が経過した場合における i の式を示せ。

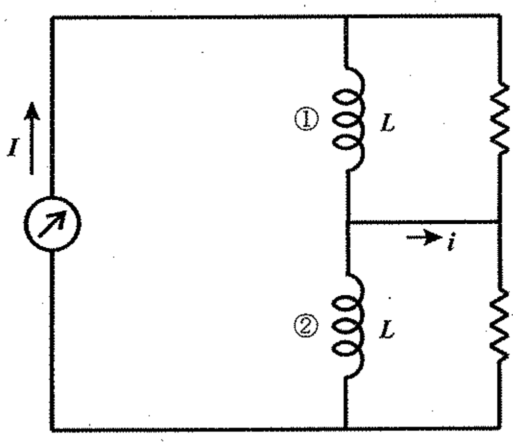


図１

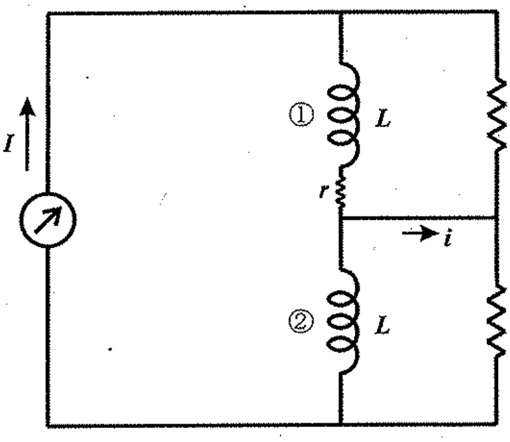


図２

問題番号	工 学 B － 2

真空中におかれた直線導線に流れる電流Iが周囲に形成する磁束密度について，以下の問に答えよ．なお，真空の透磁率はμ_0とする．

(1) 図1のように，直線導線の長さℓの区間に流れる電流Iが，点P（区間端から導線に沿った距離がdで，導線からの法線距離がaの位置）につくる磁束密度の絶対値を求めよ．

(2) 上の問で，直線導線の長さを無限長とした時，導線からの法線距離aの点における磁束密度の絶対値を求めよ．

(3) 無限長導線を2本平行に並べて同方向に電流Iを流した．図2のように2本の導線に垂直な方向をx軸とするとき，各導線からの法線距離a_A，a_Bと，x軸となす角度φ_A，φ_Bで表される任意の点Pにおける磁束密度の絶対値と向きを求めよ．

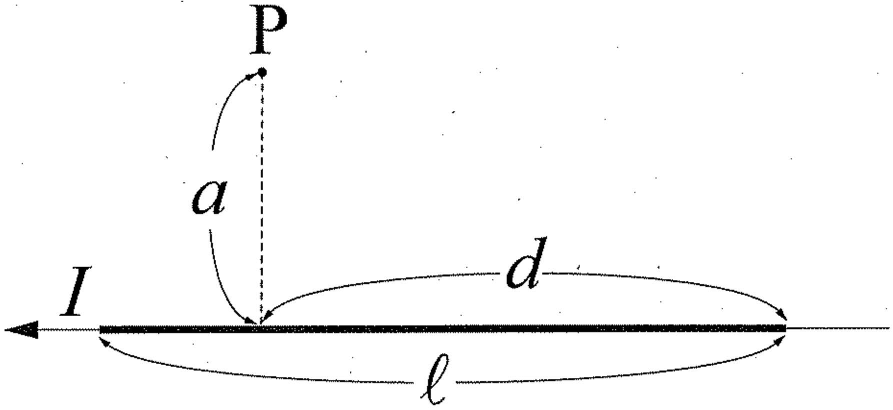


図1

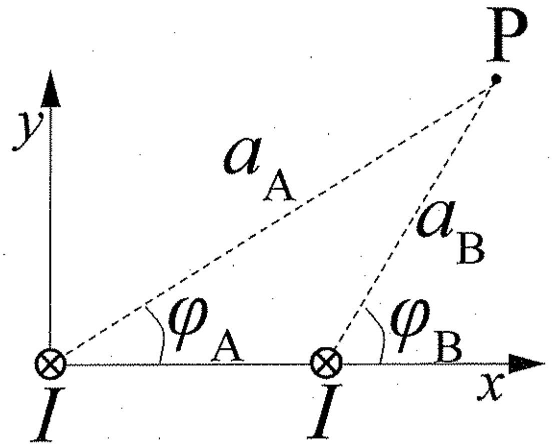


図2

問題番号	物 理 Ａ － １

問：地球（質量M,半径Rの均質な球体）を中心とする物体の運動を考える。地球中心から距離rに、物体 A(質量m_Aの質点; $m_A < M$) がある場合、地球と物体の間には、

$$F = G\frac{Mm_A}{r^2} \quad (r \geq R)$$

の力が作用する。以下、地球および全ての物体は重心の位置に質量の全てがある質点として扱ってよい。この時、以下の問いに答えよ。

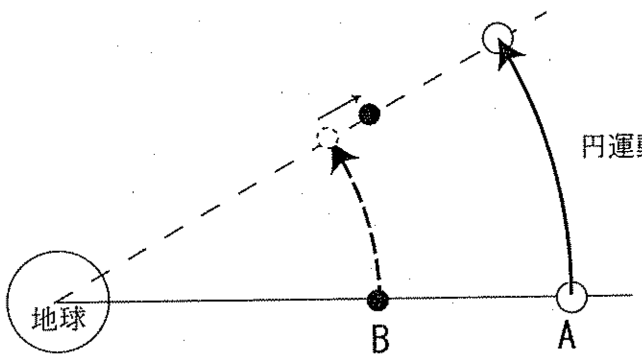
(1) 地表から高度hの点に物体 A がある時、地球と物体 A の 2 つの物体から成る系のポテンシャルエネルギーを答えよ。ただし、地球中心から無限遠方でのポテンシャルエネルギーをゼロとする。

(2) 地球中心から距離$50R$の遠方に物体 A を速度ゼロで置いたとする。この質点が重力に引かれて地表に落下するとき、地表での速度の大きさを与えよ。

(3) 物体 A が地球中心から距離Dの距離で地球の周りを等速円運動で周回する場合、距離Dと周回運動の周期Tの関係をG, M等を用いて与えよ。(大気摩擦は考えない。)

(4) (3)において、図のように地球と物体 A の間を、理想的な（質量、摩擦、変形を考慮しない）棒で連結する。この棒に物体 B(質量m_Bの質点)を置く。B は棒に沿ってのみ自由に移動できる。(図を参照。) B の質量m_BはM, m_Aに比べて十分に小さく、B は地球と A の影響を受けるが、地球と A は B の影響を受けないものとする。地球および A から B に作用する万有引力、B に作用する遠心力の合力を、物体 B の地球中心からの距離λの関数として示せ。

(5) (4)において、B に作用する力はある特定の位置（地球中心からの距離L）でゼロになる。この平衡状態から B の位置を元の地点から円運動の外側にずらした場合、B が元の地点に復帰するか否かを論ぜよ。(地球や A との衝突は考えないこととする。)



図：地球、物体(A)、物体(B)の位置関係。物体 A, B の質量はそれぞれm_A, m_Bとする。

問題番号	物 理 A － 2

1次元系における質量 m の自由粒子の波動関数 $\psi(x,t)$ （x は位置、t は時刻）が満足するシュレーディンガー方程式は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{1}$$

で与えられる。ここで、$\hbar = h/(2\pi)$ はプランク定数を 2π で割ったものである。

$f(k)$ を k の関数とすると、

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\exp\left(ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)dk \tag{2}$$

は、シュレーディンガー方程式を満足することがわかる。

以下の問いに答えよ。

問１ 上式 (2) の $\psi(x,t)$ が、以下の初期条件

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}a^{1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right)$$

を満足する場合の $f(k)$ を求めよ。ここで、a は実数の定数で $a > 0$ であり、時刻 $t = 0$ における粒子位置 x の確率分布は、分散 a^2 の正規分布 $P(x,0) = |\psi(x,0)|^2 = (2\pi)^{-1/2}a^{-1}\exp(-x^2/2a^2)$ で与えられる。

問２ 問１で得られた $f(k)$ を (2) 式に代入し、積分を実行することにより、$\psi(x,t)$ を求めよ。

問３ 問２で求めた $\psi(x,t)$ から得られる時刻 t における粒子位置 x の確率分布 $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ は、正規分布

$$P(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\Delta(t)}\exp\left(-\frac{x^2}{2[\Delta(t)]^2}\right)$$

の形で与えられる。上式において時刻 t における粒子位置 x の分布の広がりを表す $\Delta(t)$ の表式を示せ。また、$\Delta(t)$ と時刻 t の比の $t\to\infty$ における極限値

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Delta(t)}{t}$$

を求めよ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成２２年度１０月入学・平成２３年度４月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	物 理 B － 1

（1） 図１に示すように、磁束密度 $B=3$ [Wb/m²] の一様な磁場が存在する空間で、磁場に直交する平面上にコの字型の導線 ABCD が置かれている。ここで、AB と CD は平行で、間の距離は $\ell=0.5$ [m]とする。今、導体棒 PQ を、BC と平行を保ちながら、磁場と BC に直交する方向に一定の速度 $v=2$ [m/s] で移動させるものとする。このとき、回路 PBCQ に生じる誘導起電力の大きさを回路に鎖交する磁束の変化から求めよ。ただし、PQ 間には高抵抗が入っており、誘起される電流による外部磁場の変化は無視できるものとする。

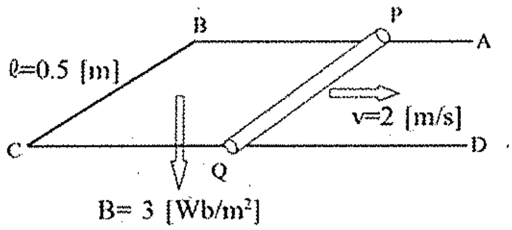


図１

（2） 図１の導体棒 PQ の内部に着目する。図 2a に示すように磁場 B を垂直に横切るとき、導体棒 PQ 中の自由電子には P から Q に向かうローレンツカ f_1 が働くため、自由電子は速やかに Q の方へ移動し、図 2b に示すように P に正の電荷が現れる。その結果、P から Q に向かう電場が生じるため、自由電子には、ローレンツカ f_1 とは逆向きにクーロンカ f_2 が働く。この二力がつり合うことから、導体棒 PQ の両端に発生する電位差を求めよ。ただし、導体棒の長さ、磁束密度、導体棒の移動速度は図１と同じで、$\ell=0.5$ [m]、$B=3$ [Wb/m²]、$v=2$ [m/s] とする。

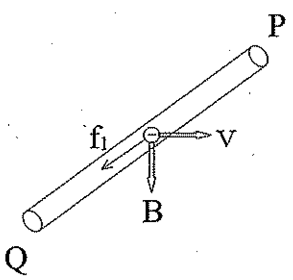


図 2a

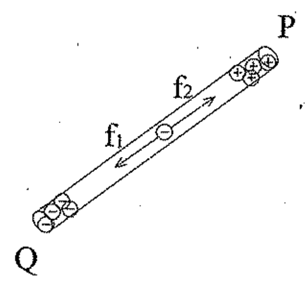


図 2b

（3） 図３に示すように、磁束密度 $B=3$ [Wb/m²] の一様な磁場中で、半径 $a=0.2$ [m] の導体円板が、磁場と平行な中心軸の周りに角速度 $\omega=2\pi$ [rad/s] で回転している。円板の中心軸（この部分も導体とする）と円板の外周との間に生じる起電力の大きさ U [V] を求めよ。

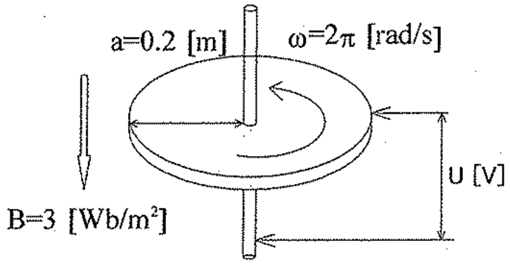


図３

問題番号	物 理 B － 2

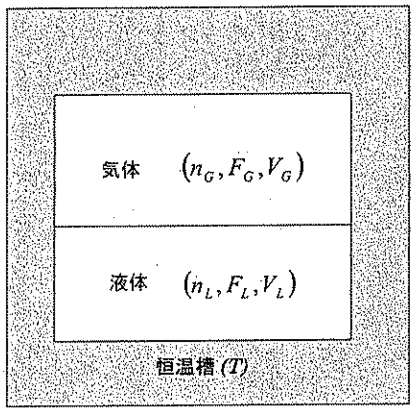
問：以下の設問に答えよ。

(1) 考えている系も外界も一定の温度Tであるような場合を考える。熱力学第一法則から

$$dE - d'W \le TdS \quad (\text{等号は可逆過程の時に成立})$$

が与えられている。ここで、E,Sはそれぞれ内部エネルギー、エントロピーを、dEは内部エネルギーの変化量を、dSはエントロピーの変化量を、$d'W$は外から系への仕事を表す。等温変化の場合、系が外界に対して行う仕事は Helmholtz の自由エネルギー$F=E-TS$の変化量の絶対値を越えないことを示せ。また、等温変化で外部からの仕事もない場合、系に不可逆な変化が起こると必ず自由エネルギーFが減少することを示せ。

次に、等温な系の平衡の条件について考える。図のように、気体と液体の 2 つの系が恒温槽に入っている。液体、気体それぞれのモル数、1モルあたりの Helmholtz の自由エネルギーと1モル当たりの体積を(n_L, F_L, V_L)、(n_G, F_G, V_G)とする。温度及び2つの系の総体積は一定に保たれ、外からの仕事$d'W=0$である。系全体の Helmholtz の自由エネルギーFは$F=n_LF_L+n_GF_G$と書かれる。系の平衡状態においてはFは極小値をとるので、変分$\delta F=0$となる。このとき、以下の設問に答えよ。



図：恒温槽に入った液体と気体。

(2) $\delta F=0$の式が

$$n_L\delta F_L + n_G\delta F_G + F_L\delta n_L + F_G\delta n_G = 0$$

となることを示せ。

(3) F_L, F_Gをそれぞれ 1 モルあたりの体積Vと温度Tの関数として考える。(2)の結果と等温過程についての熱力学の公式$p=-(\partial F/\partial V)_T$ (これは気体、液体それぞれについて成立する)を用いて、

$$F_L\delta n_L + F_G\delta n_G - n_Lp_L\delta V_L - n_Gp_G\delta V_G = 0$$

を示せ。

(4) この系の平衡を考える場合、束縛条件は

$n_L + n_G =$ 一定　(総モル数一定),　$n_LV_L + n_GV_G =$ 一定　(総体積一定)

である。この時、平衡にある気体と液体の間では圧力pおよび1モルあたりの Gibbs の自由エネルギー$G=F+pV$が気体・液体間で同一でなければならないことを示せ。