

以下の設問に答えよ。ただし、以下の全ての問題において関数の定義域は $-\infty < x < \infty$ であり、周期  $L$  の関数とは  $f(x) = f(x + L)$  が成り立つ事を意味する。

1. 周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  が区間  $-\pi \leq x < \pi$  において 1), 2) のように与えられている。これらの関数のフーリエ級数を求めよ。

1)  $f(x) = 2|x|,$

2)  $f(x) = \frac{x^2}{2} .$

2. 周期  $2\pi$  の2つの関数  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  があり、それぞれ区間  $0 \leq x < 2\pi$  においては

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$f_2(x) = x ,$$

によって定義されている。 $f_1(x)$  は  $x = 2n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) において不連続であり、 $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) において  $f_1(x)$  の導関数  $f_1'(x)$  は  $f_2(x)$  と一致する。この時、 $f_1(x)$  のフーリエ級数を項別微分した結果と、 $f_2(x)$  のフーリエ級数が異なる事を示せ。

$-\infty < x < \infty$  に対して定義される実数係数を持つ多項式の関数空間  $\mathcal{F}$  を考える。この関数空間では要素  $A(x) \in \mathcal{F}$  及び  $B(x) \in \mathcal{F}$  に対して、内積  $(A, B)$  が定義されているとする。今、 $\mathcal{F}$  の要素で構成される、一次独立であるが必ずしも直交していない関数列  $F_0(x), F_1(x), \dots, F_i(x), \dots$  を考え、その線型結合によって正規直交関数系  $G_0(x), G_1(x), \dots, G_i(x), \dots$  を作ることを考える。

ただし、内積は、 $(A, A) \geq 0$  を満たし、 $A$  が恒等的に0に等しい時にのみ  $(A, A) = 0$  が成り立つものとする。また、内積は、実数  $\alpha, \beta$ 、要素  $C(x) \in \mathcal{F}$  に対して、 $(A, B) = (B, A)$  及び、 $(\alpha A + \beta B, C) = \alpha(A, C) + \beta(B, C)$  を満たすものとする。この内積により、ノルムを  $\|A\| = \sqrt{(A, A)}$  と定義する。

(1)  $G_0 = F_0 / \|F_0\|$  とするとき、 $G_0$  と  $F_1$  との線型結合によって、 $G_0$  と直交する正規化された関数  $G_1$  を作れ。

(2) (1) の  $G_0, G_1$  と  $F_2$  との線型結合によって、 $G_0, G_1$  の両方と直交する正規化された関数  $G_2$  を作れ。

(3)  $F_i(x) = x^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) とおき、関数空間  $\mathcal{F}$  における内積を、

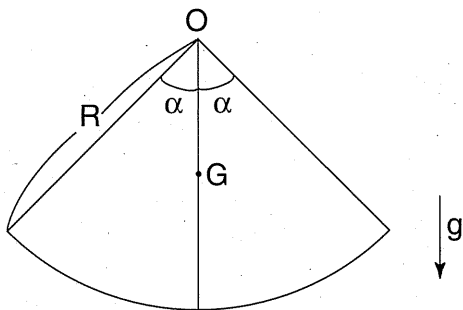
$$(F_i, F_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x) F_j(x) e^{-x^2} dx \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

と定義する。 $G_0 = F_0 / \|F_0\|$  とし、(1) の手法を用いて、 $G_1$  を  $G_0$  と  $F_1$  との線型結合により作るものとする。このとき、 $G_0, G_1$  を求めよ。

図に示すような半径  $R$ 、質量  $M$  の扇形の板を考える。板の厚みは無視でき、板の質量の面密度は一定とする。中心角を  $2\alpha$  とし  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  とする。

(1) 板の重心を  $G$  としたとき、距離  $\overline{OG}$  を求めよ。

(2) 固定点  $O$  を中心として、この板を含む平面内で微小振幅で振動させたときの周期を求めよ。ただし、矢印の方向に重力がかかっている重力加速度は  $g$  とする。摩擦や空気抵抗は考えない。



周囲と相互作用しない、孤立した箱の中に気体分子が入っている。別に断らない限り、気体分子は全て同種であり、その挙動は統計的に独立であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 箱の中央に仕切りを入れて左右同じ体積の2つの小部屋を作ったところ、 $N$ 個の気体分子が左右の小部屋にそれぞれ  $J$  個、 $K$  個に分かれて入った。気体分子がこのように分かれる場合の数  $W$  を示せ。

(2) 初期に箱の左側の小部屋だけに  $N$  個の気体分子を入れ、右側の小部屋は空にする。ある瞬間に仕切りを取り払ったところ、気体は左右にそれぞれ  $J$  個、 $K$  個の分子が入った状態に移行した。仕切りを取り払う前と後の気体のエントロピーを、ボルツマンのエントロピー方程式

$$S = k \ln W$$

を用いて示せ。但し、 $k$  はボルツマン定数である。

(3) (2)において  $J=K=N/2$  となる場合について、仕切りを取り払う前と後のエントロピーの変化量を示せ。また、この場合のエントロピーの変化量が

$$\Delta S = kN \ln 2$$

である事を、スターリングの公式

$$\ln M! \approx M \ln M - M$$

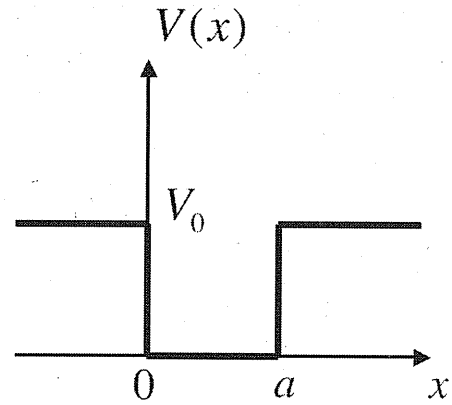
を用いて示せ。但し、 $M$  は大きな正の整数である。

(4) 異なる気体分子 A 種、B 種の混合の問題を考える。左の小部屋には気体分子 A 種が、右の小部屋には気体分子 B 種がそれぞれ  $N/2$  個入っている。仕切りを取り払ったところ、この2種の気体分子はそれぞれ箱の中全体に均等に広がり、混合した。この際の箱の中全体におけるエントロピーの総変化量を示せ。

(5) (4)で初期に左右に分けられていた気体分子 A、B が同一種である場合を考える。 $N$  個の気体分子が箱の中全体に均等に分布しているという意味において、仕切りを取り払う前後で変化がないように見える。本当に変化がなければエントロピーの変化量はゼロであり、(4)の場合と一見矛盾する。(4)のエントロピー変化の意味について論ぜよ。

図に示すように、 $x$  軸上にポテンシャル  $V(x)$  の井戸がある場合について、質量  $m$  を持つ粒子の1次元運動を考える。 $V(x)$  は

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ V_0 & (x < 0, x > a) \end{cases}$$



で与えられる。ただし、 $V_0 > 0$ 、 $a > 0$  とする。

エネルギー固有値  $E$  を持つ粒子に対する定常状態のシュレーディンガー方程式は、

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

で与えられる。 $\hbar = h/(2\pi)$  であり、 $h$  はプランク定数である。ここでは、 $0 < E < V_0$  の場合を考えることにする。 $x < 0$  および  $x > a$  の領域におけるシュレーディンガー方程式の解は、それぞれ、

$$\psi(x) = A \exp(\gamma x) \quad \text{および} \quad \psi(x) = B \exp(-\gamma x)$$

の形に書くことができる。ここで、 $A$ 、 $B$  および  $\gamma$  は定数であり、 $\gamma > 0$  である。また、 $0 < x < a$  の領域におけるシュレーディンガー方程式の解は、

$$\psi(x) = C \sin(kx + \delta)$$

の形に書くことができる。ここで、 $C$ 、 $k$  および  $\delta$  は定数であり、 $k > 0$ 、 $0 \leq \delta < \pi$  を満たすように選ぶものとする。

問1  $m$ 、 $\hbar$ 、 $E$  および  $V_0$  を用いて、 $\gamma$  を表せ。また、 $m$ 、 $\hbar$  および  $E$  を用いて、 $k$  を表せ。

問2 ポテンシャル井戸の境界  $x = 0$  と  $x = a$  において対数微分  $(d\psi(x)/dx)/\psi(x)$  が連続であるという条件から、 $k$ 、 $\delta$ 、 $a$  および  $\gamma$  に関する2つの関係式を導け。また、エネルギー固有値  $E$  を  $m$ 、 $a$ 、 $\hbar$  および  $V_0$  に関係づける条件式を導け。

問3  $V_0 \rightarrow +\infty$  の極限におけるエネルギー固有値  $E_n$  を  $m$ 、 $a$ 、 $\hbar$  および  $n$  を用いて表せ。ただし、 $n$  は0以上の整数 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で、エネルギー準位  $E_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は小さい値から大きい値へ順に並ぶものとする。

以下の問題に答えよ。ただし、透磁率は全領域で真空の透磁率  $\mu_0$  に等しいとする。

- (1) 図1に示すように、外半径  $a$ 、内半径  $b$  の無限に長い中空円筒導体に、一様な密度  $J$  の電流が  $z$  軸方向に流れているとき、各領域の磁束密度を半径  $r$  の関数として求めよ。

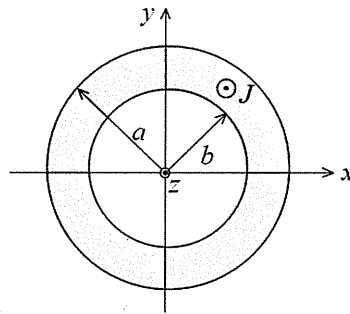


図1

- (2) 図2に示すように、無限に長い同軸円筒導体の内外導体#1, #2 に同じ大きさの電流  $I$  が互いに  $z$  軸の逆方向に一様に流れているとき、単位長さあたりの磁気エネルギーを求めよ。ここで、外導体の外半径を  $a$ 、内半径を  $b$ 、内導体の半径を  $c$  とする。

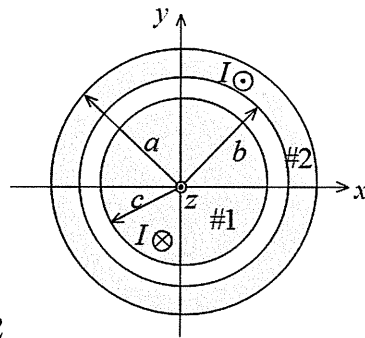


図2

- (3) 図3に示すように、半径  $a$  の無限に長い円筒導体の内部に、その中心軸  $z$  から  $d$  だけ離れた位置に半径  $b$  の円筒空洞がある。導体に一様な密度  $J$  の電流が  $z$  軸方向に流れているとき、空洞内の磁束密度を求めよ。

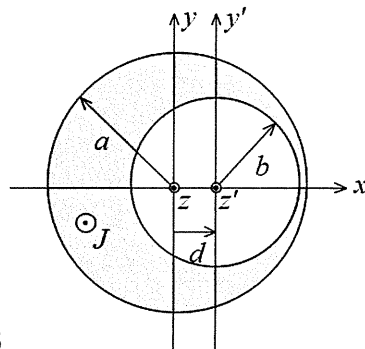


図3

問1 図1に示す電気回路では、静電容量  $C_1$ 、および、 $C_2$  の二つのコンデンサが、最初、それぞれ、電圧  $V_1$ 、および、 $V_2$  に充電されている。時刻  $t = 0$  においてスイッチ  $S$  を閉じて、抵抗値  $R$  の抵抗によって二つのコンデンサ間を短絡した。

- (1)  $t > 0$  における電流  $I$  の時間変化を数式で表せ。
- (2) 抵抗で消費される全熱エネルギーが、二つのコンデンサの静電エネルギーの変化分に等しいことを、(1) の結果を使って示せ。

問2 図2に示す電気回路では、静電容量  $C$  のコンデンサが、最初、電圧  $V_0$  に充電されている。時刻  $t = 0$  においてスイッチ  $S$  を閉じて、インダクタンス  $L$  のコイルと抵抗値  $R$  の抵抗を直列に接続して、回路を短絡した。

- (1)  $t > 0$  における電流  $I$  の時間変化を数式で表せ。
- (2) 抵抗で消費される全熱エネルギーが、最初コンデンサに蓄えられていた静電エネルギーに等しいことを、(1) の結果を使って示せ。

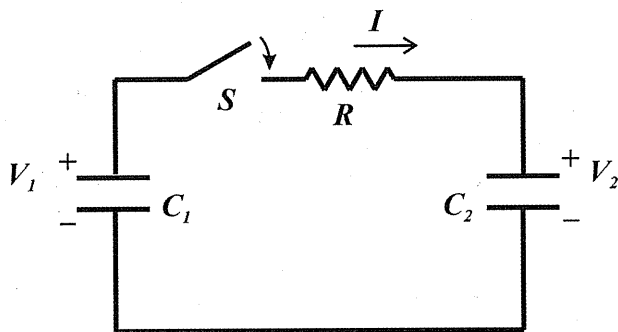


図1

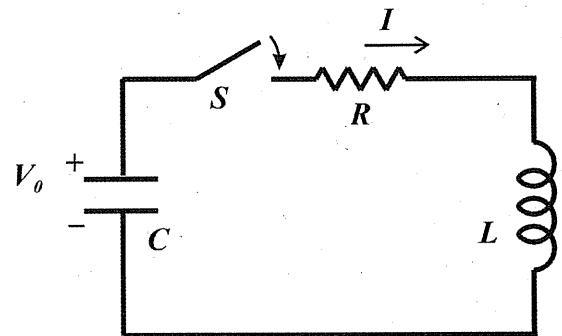


図2

図1に示すように、両端が半球形状をした円筒形の薄肉容器に、圧力  $p$  で気体を充填している。ただし、容器の壁の厚み  $t$  は容器全体について一様で、かつ、円筒の半径  $a$  に比べて十分薄く ( $t \ll a$ )、壁は平面応力状態にあるとする。また、容器の外は真空とする。

- (1) 円筒形容器の直線部  $-L < z < L$  において、容器壁に生じる周方向 ( $\theta$  方向) の応力  $\sigma_\theta$  を容器の半径  $a$ 、圧力  $p$ 、壁の厚み  $t$  を用いて表せ。
- (2) 円筒形容器の直線部  $-L < z < L$  において、容器壁に生じる軸方向 ( $z$  方向) の応力  $\sigma_z$  を容器の半径  $a$ 、圧力  $p$ 、壁の厚み  $t$  を用いて表せ。
- (3) 気体の圧力を徐々に上昇させていき、容器壁に働く応力が容器壁を構成する材料の許容応力  $\sigma_m$  を超え、最終的に容器の直線部  $-L < z < L$  において破壊 (亀裂) が生じた。このとき、亀裂が進展する方向は、容器の周方向 ( $\theta$  方向) と軸方向 ( $z$  方向) のどちらであるかを、(1) と (2) の結果をもとに答えよ。
- (4) 円筒形容器において直線部の長さをゼロ ( $L=0$ ) とした場合、容器は球形容器となる。球形容器の壁に生じる周方向 ( $\theta$  方向) の応力  $\sigma_\theta$  について、容器の半径  $a$ 、圧力  $p$ 、壁の厚み  $t$  を用いて表せ。

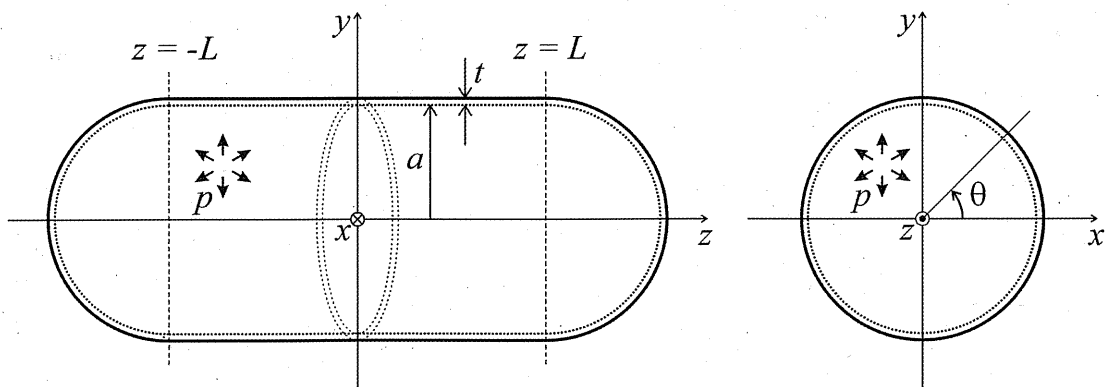


図1. 両端が半球形状をした薄肉の円筒形容器