問題番号	数 学 － 1

行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ をそれぞれ

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．t を実数として，$g(t) = e^{-t\sigma_y}\sigma_z e^{t\sigma_y}$ を計算する．ここで，A は行列として，$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ である．以下の問いに答えよ．なお，行列の微分は各成分の微分である．

(1) $[\sigma_z, \sigma_y]$ と $[\sigma_y, \sigma_x]$ を計算せよ．ここで $[A, B] = AB - BA$ である．

(2) $\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ を証明せよ．

(3) $\frac{dg}{dt}$ と $\frac{d^2g}{dt^2}$ をそれぞれ計算して，g に関する２階常微分方程式を導け．問 (2) の関係式を使ってよい．

(4) $t = 0$ のときの g と $\frac{dg}{dt}$ の値をそれぞれ計算せよ．

(5) 問 (3)，(4) で得られた２階常微分方程式の初期値問題を解け．

問題番号	数　学　－　2

次の漸化式を，以下の手順に従って解け．

$$x_{k+2} = x_{k+1} - 2x_k \qquad (k = 0,1,2,\cdots), \quad x_0 = 0, x_1 = 1 .$$

（1） $\overrightarrow{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ とし，上の漸化式が，$\overrightarrow{X}_{k+1} = \mathbf{A}\overrightarrow{X}_k$ と表せるように行列 $\mathbf{A}$ を定め，

$\mathbf{A}$ の固有値を求めよ．

（2） $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ が対角行列となるような行列 $\mathbf{P}$ を求めよ．

（3） $n = 1,2,\cdots$ に対し， $\mathbf{A}^n$ を求めよ．

（4） x_n の一般項を求めよ．

問題番号	理 工 学 － 1

１次元空間に，ポテンシャル $U(x) = (m/2)\omega^2 x^2 - m\varepsilon x^3$ によって与えられる古典力学的運動を行う振動子があるとする．ここで，x は位置座標，m はこの振動子の質量，ω と ε は実定数，$\varepsilon > 0$ とする．ε は十分小さいとして，この振動子の運動を考える．以下の問いに従って，この振動子の運動方程式にたいする ε の１次のオーダーまでの解を求めよ．ただし，初期条件として，時刻 $t = 0$ において $x = 0$ かつ $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = (1+\varepsilon)A$ であるとする．ここで，A は実定数とする．

(a) この振動子が従う運動方程式を記せ．

(b) $\varepsilon = 0$ として，運動方程式の解を求めよ．以下，この解を $x_{(0)}$ と表すことにする．

(c) 問 (a) の運動方程式にたいする ε の１次のオーダーまでの解 $x_{(1)}$ は，

$$x_{(1)} = x_{(0)} + \varepsilon \tilde{x}$$

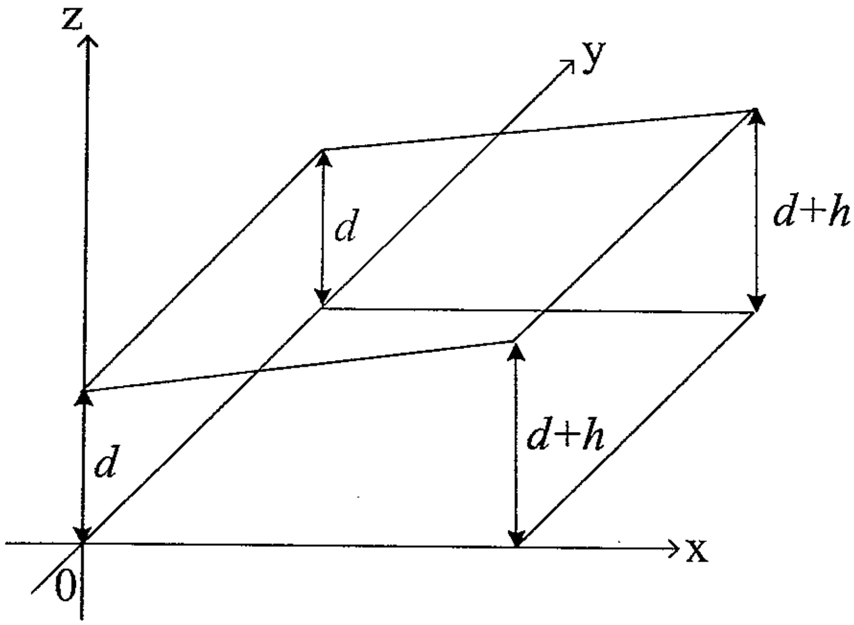
と近似できるとする．問 (a) の運動方程式から $\tilde{x}$ の時間発展を表す方程式を求めよ．ただし，$\tilde{x}$ は ε を含まないとし，この方程式において ε を含む項は無視する．

(d) $x_{(1)}$ を求めよ．

問題番号	理 工 学 － 2

（１）
１辺の長さaの正方形で，間隔dの平行平板コンデンサーの２つの極板に$+Q$と$-Q$の電荷を与えたとき，コンデンサーの電気容量Cをaとdを用いて SI 単位系で表せ．ここで，極板間の電位差をVとすれば，電気容量Cを使って$Q = CV$と表される．極板の間の空間は真空，真空の誘電率はε_0とする．dはaに比べて小さく，極板の端の影響は無視できる．

（２）
図に示すように，１辺の長さがaの正方形の２枚の導体平板を４隅の間隔が $d, d+h$, $d+h, d$となるように向き合わせた．下の平板はxy平面上にあり，極板間の空間は真空，真空の誘電率はε_0とする．このコンデンサーの電気容量Cを求めよ．ここで，dはaに比べて小さく、極板の端の影響は無視できる．また，hはdよりも十分小さく，$h > 0$とし，電場はz方向としてよい．



図

（３）
$h \to 0$の極限では，問題（２）の答えが問題（１）の答えと一致することを示せ．

問題番号	理工学 － 3

断熱体からなる円筒容器がある。最初、容器は固定されたピストンで二つの同じ体積V_0の部屋に分けられている。左の部屋は圧力 0.50 MPa のガス A で、右の部屋は圧力 0.10 MPa のガス B で満たされている。ガス A の量は 1.0 mol である。ガス A とガス B は理想気体と考えてよい。これらのガスの気体定数 R は 8.3 $\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ である。系全体の初期温度は 300 K である。円筒容器とピストンをあわせた系の熱容量は一定である。計算結果の有効数字は二桁とせよ。

次に、ピストンの固定が外されると、ピストンは自由に動くものとする。ピストンが平衡位置に留まった状態を考えよ。

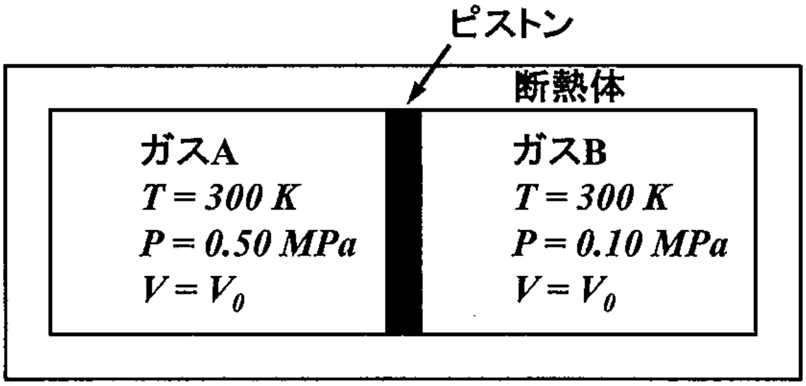
(1) ピストンに熱伝導性があり、容器とピストンの間の摩擦が無視できるとき、系の温度を求めよ。

(2) ガス A の体積の、ガス B のそれに対する比を求めよ。

(3) 系の全エントロピーの変化を求めよ。計算には下の表を用いよ。

そして、ピストンを取り除いたと仮定する。

(4) さらなるエントロピーの変化を求めよ。ピストンの体積は無視してよい。



図

自然対数表

x	2	3	4	5	6
$\ln x$	0.69	1.1	1.4	1.6	1.8

１次元空間において，以下のようなポテンシャル $V(x)$ を考え，エネルギー E の非相対論的粒子が $x=-\infty$ から入射したとする．

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x > 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{上記以外の場合.} \end{cases}$$

ここで，x は位置座標，V_0 は正の定数とする．粒子の質量を m（$m>0$ である），粒子のエネルギー E は正の定数とする．プランク定数を h，$\hbar = h/(2\pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) エネルギー E の粒子が従う，時間によらないシュレーディンガー方程式を記せ．ここで，波動関数は $\psi(x)$ で表すことにする．

(2) $E < V_0$ の場合における粒子の反射率と透過率を問 (1) の式から求めよ．

(3) $E > V_0$ の場合における粒子の反射率と透過率を問 (1) の式から求めよ．