受験番号	

２０１９（平成３１）年度（　４月入学）

２０１９（平成３１）年度（１０月入学）

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻

５年一貫制博士課程

入学者選抜試験　筆記（専門科目）問題

【注意事項】

・試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。

・本問題冊子は，６ページ（本紙を除く）である。

問題用紙及び解答用紙の不備，落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。

・６題の試験問題の中から，３題を選択，解答すること。

・問題１題につき対応する１枚の解答用紙（両面使用可）を使用すること。

・問題冊子及び６枚全ての解答用紙の指定箇所に受験番号を必ず記入すること。

・採点を希望する問題の解答用紙の採点希望欄に〇印を，希望しない問題の解答用紙には×印を記入すること。４枚以上の解答用紙に〇印を付けた場合には，全ての解答が無効となることに注意すること。

・問題冊子の余白は，計算に用いてよい。

・問題冊子及び解答用紙は持ち帰らないこと。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成３１年度４月入学・平成３１年度１０月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	専門科目－Ⅰ（古典力学）

1. 密度が一様な半径r、質量mの小球を考える。図1のような座標系を考えた場合、位置zにおける厚さ$\mathrm{d}z$の均質な微小質量円盤の慣性モーメントは$\frac{1}{2}\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}\pi(r^2-z^2)^2\mathrm{d}z$と表せる。この球の微小質量を全領域にわたって積分することにより、球の慣性モーメント$I=\frac{2}{5}mr^2$を導け。
2. 図2のように水平な面を小球が滑ることなしに回転して移動する場合を考える。このときの小球の重心速度をv、球の中心まわりの回転角速度をωとすると、球の移動に必要なエネルギーEは、重心の運動エネルギーと球の回転エネルギーの和で求められる。Eをm、vで表せ。なお、球の回転エネルギーは$\frac{1}{2}I\omega^2$と表せる。
3. 図3のように、上記の球が半径Rの固定された大球の真上から表面上を滑ることなしに回転する場合を考える。図のようにθを定義すると、小球のエネルギーは保存するものとして小球の重心速度vをθ、g、R、rで表せ。ただし、gは重力加速度、小球の初期位置は$\theta=0$、初期速度は$v=0$とする。
4. θがある角度θ_cまで達すると、垂直抗力が0となり、小球が大球から飛び出す。このとき、$\cos\theta_c$を求めよ。

図1

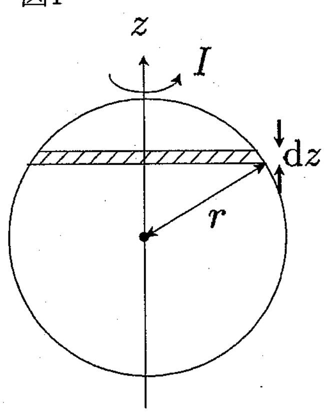


図2

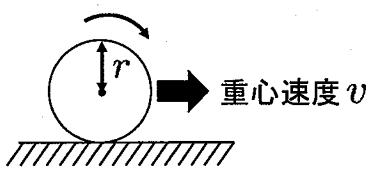
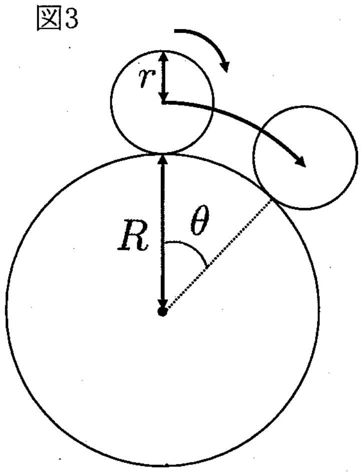


図3



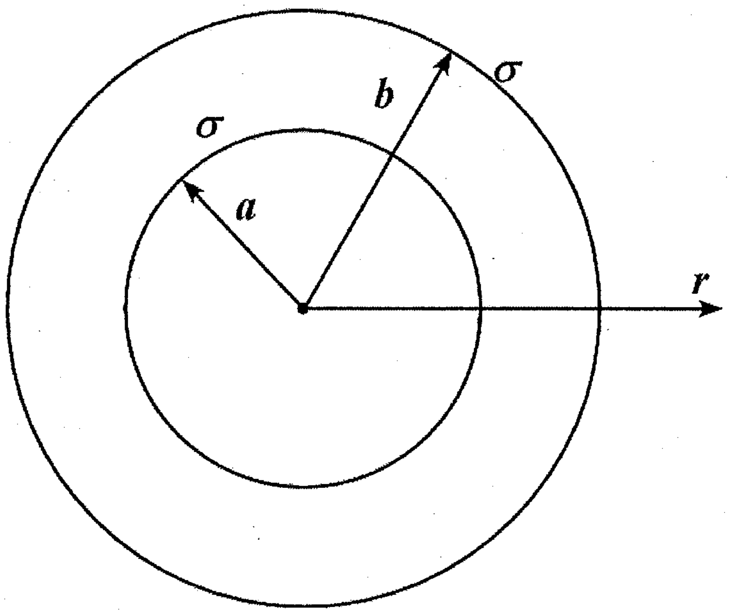
問題番号	専門科目－Ⅱ（電磁気学）

図に示すような真空中に置かれた同心の無限に薄い 2 つの球殻がある。内部の球殻($r=a$)と外部の球殻($r=b$)に、同じ一様な表面電荷密度σが分布している。その他の点では電荷が 0、真空の誘電率をε_0として、次の問題に答えよ。

1. 次の 3 つの領域について、ガウスの法則を用いて電場$E(r)$を求めよ。
   - i) $0 < r < a$
   - ii) $a < r < b$
   - iii) $b < r$

2. 問 1.で得られた結果を用いて、次の 3 つの領域の電位$\Phi(r)$を求めよ。
   - i) $0 \leq r < a$
   - ii) $a \leq r < b$
   - iii) $b \leq r$

3. 問 1.および問 2.で得られた電場、電位の概略図を示せ。



問題番号	専門科目－Ⅲ（量子力学）

角周波数 ω で質量 m の１次元調和振動子のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は式 (1) で表せる。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \tag{1}$$

$\hat{x}$ と $\hat{p}$ は、それぞれ位置演算子と運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ である。ここで、$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ で h はプランク定数で、i は虚数単位である。この系の生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ と消滅演算子 $\hat{a}$ は以下の式で表せる。

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[(m\omega)^{1/2} \hat{x} - i (m\omega)^{-1/2} \hat{p} \right] \tag{2}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[(m\omega)^{1/2} \hat{x} + i (m\omega)^{-1/2} \hat{p} \right] \tag{3}$$

以下の設問に答えよ。

1. $\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ の交換関係を $\left[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と定義する。式 (2) と式 (3) を用いて、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\left[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger\right] = 1$$

2. 式 (2) と (3) から、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ で表せ。
3. 式 (1) のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は、$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて以下の式で表せることを示せ。

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \tag{4}$$

4. 式 (4) のハミルトニアンの固有関数は量子化される。量子化された n 番目の励起状態にある固有関数を $|n\rangle$ と表すとすると、$\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ を $|n\rangle$ に作用させた場合、それぞれ $\hat{a}^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle$ と $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ が成り立つ。これら２つの式と式 (4) を用いて次式を導け。

$$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

問題番号	専門科目－Ⅳ（熱統計力学）

$\sigma_i = \pm 1$ で表される N 個のスピン σ_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ が図のように環状に並んでいる。今、この系の分配関数が次で与えられるイジング模型を考える。

$$Z = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\sigma_N}\exp\left(\frac{J}{kT}\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sigma_{j+1}\right)$$

ここで、$\sigma_{N+1} = \sigma_1$ であり、$\sum_{\sigma_i}$ は $\sigma_i = \pm 1$ についての和を表す。また、$J\ (>0)$ は任意定数、k はボルツマン定数、$T\ (>0)$ は温度である。この系に関する以下の問いに答えよ。

1. $\exp(a\sigma_i\sigma_j) = \cosh a + \sigma_i\sigma_j \sinh a$ の関係を利用して、

$$Z = \sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}\cdots\sum_{\sigma_N}\prod_{j=1}^{N}\left(\cosh\frac{J}{kT} + \sigma_j\sigma_{j+1}\sinh\frac{J}{kT}\right)$$

となることを示せ。

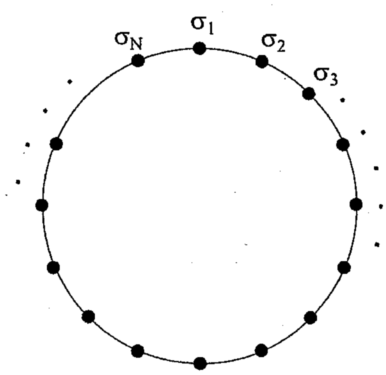
2. さらに、$\sum_{\sigma_i}\sigma_i = 0$ および $(\sigma_i)^2 = 1$ の性質を利用して、次式を導け。

$$Z = 2^N\left[\left(\sinh\frac{J}{kT}\right)^N + \left(\cosh\frac{J}{kT}\right)^N\right]$$

3. $N \gg 1$ のとき、$\left(\cosh\frac{J}{kT}\right)^N \gg \left(\sinh\frac{J}{kT}\right)^N$ となるので、問 2. の分配関数は、$Z = 2^N\left(\cosh\frac{J}{kT}\right)^N$ とできる。

   a) この場合の自由エネルギー $F = -kT\ln Z$ を求めよ。

   b) また、この場合の比熱 C を求めよ。
   ここで、$\beta = \frac{1}{kT}$ として、内部エネルギー $U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ と比熱 C は、$C = \frac{\partial U}{\partial T}$ の関係にあり、また、$\frac{\mathrm{d}(\tanh x)}{\mathrm{d}x} = (\mathrm{sech}\ x)^2$ である。



問題番号	専門科目－V（数学）

以下の問いに答えよ。

1. 次の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 9y = 0$$

の一般解を求めよ。

2. 次の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = 0$$

の一般解を求めよ。

3. 次の一次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

を考える。ここで、c は定数である。

a) 解 $u(x,t)$ を $u(x,t) = f(x)g(t)$ と置ける時、波動方程式を変数分離した後の常微分方程式を示せ。

b) x の範囲を $0 \leq x \leq 1$、境界条件を $u(0,t) = u(1,t) = 0$、初期条件を $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$、$u(x,0) = x(1-x)$ とした時、波動方程式の解を求めよ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
平成３１年度４月入学・平成３１年度１０月入学
５年一貫制博士課程入学者選抜試験問題

問題番号	専門科目－VI（電気工学）

下図に示すような電圧 V_E を持つ電源、抵抗値 R を持つ抵抗器、インダクタンス L を持つコイルからなる直流回路を考える。次の問いに答えよ。

１．時刻 $t=0$ にスイッチを **A** に接続した時、回路に流れる電流 i、コイル、抵抗器にかかる電圧V_L、V_Rを時間 t の関数として求めよ。

２．十分時間が経過した後に到達する電流値 I を求めよ。また、コイルに蓄えられたエネルギーを求めよ。

３．十分時間が経過した後、スイッチを **B** に切り替える。回路に流れる電流 i と電圧V_L、V_Rを時間 t の関数として求めよ。また、その際、抵抗器で消費されるエネルギーがコイルで蓄えられたエネルギーと同じであることを示せ。

４．時刻 $t=0$ でスイッチを **A** に接続し、電流が定常値に近づいた後で **B** に切り替えた後の i、V_L、V_Rの時間変化を図示せよ。フリーハンドで良い。