受験番号	

２０１９（令和元）年度（１０月入学）

２０２０（令和２）年度（　４月入学）

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻

博士課程（５年一貫制）

入学者選抜試験　筆記（専門科目）問題

【注意事項】

・試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。

・本問題冊子は，６ページ（本紙を除く）である。
問題用紙及び解答用紙の不備，落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。

・６題の試験問題の中から，３題を選択，解答すること。

・問題１題につき対応する１枚の解答用紙（両面使用可）を使用すること。

・問題冊子及び６枚全ての解答用紙の指定箇所に受験番号を必ず記入すること。

・採点を希望する問題の解答用紙の採点希望欄に○印を，希望しない問題の解答用紙には×印を記入すること。４枚以上の解答用紙に○印を付けた場合には，全ての解答が無効となることに注意すること。

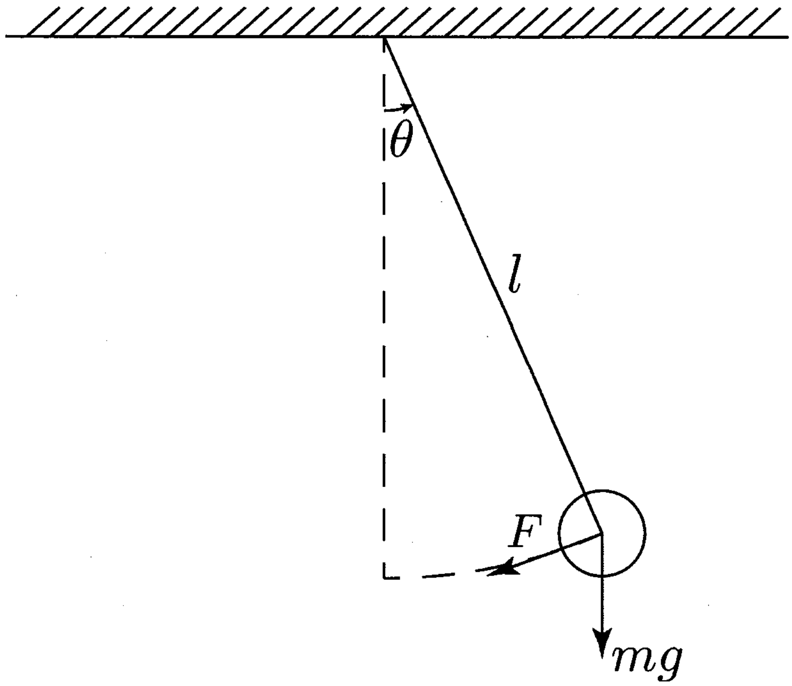
・問題冊子の余白は，計算に用いてよい。

・問題冊子及び解答用紙は持ち帰らないこと。

問題番号	専門科目－Ｉ（古典力学）

質量 m の物体が長さ l の棒に繋がって運動をする場合を考える。ここで、棒は伸縮性がなく、その質量は考えない。図のように、鉛直下向きを $\theta = 0$ として、鉛直方向から角度 θ を定義する。初期位置 $\theta = \theta_0$ から重力に加えて、円運動の軌道に沿って F の力を $\theta = 0$ まで加え続けるとする。重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

1. $F = mg$ として $\theta = \theta_0$ から $\theta = 0$ までの、角度方向 θ に対する物体の運動方程式を書け。
2. $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$ として、問 1. の運動方程式を θ、 ω で書き直せ。ただし、$\sin\theta \sim \theta$ と近似できるものとする。
3. 問 2. の運動方程式の一般解を求めよ。解答には、任意定数を含めてよい。一般解を求めるに際し、$\theta + 1 = \xi$ と置くとよい。
4. θ を θ_0、ω、t で表せ。ただし、時刻 $t = 0$ で $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$ とする。
5. $\theta = \theta_0$ から $\theta = 0$ までに要する時間 t_1 [s] を数値で求めよ。ただし、$\theta_0 = \sqrt{2} - 1$ [rad]、$g = 9.8$ [m/s^2]、$l = 0.49$ [m] とする。また、$\pi = 3.14$、$\sqrt{5} = 2.24$ とする。



問題番号	専門科目－II（電磁気学）

二次元極座標 (r, ϕ) において、真空中の平面内に、$r=0$を中心とする軸対称で時間的に変動する磁束密度 $B(r, t)$ がある。ここで t は時間であり、この磁束密度は平面に垂直方向とする。$r=r_0$ の場所に電子(電荷: $-e$)を置き、図のような円形軌道に沿って運動する場合を考える。ここで、半径 r_0 の円形軌道で囲まれた領域 S を貫く磁束密度の平均を

$$B_{\mathrm{avg}}(t) = \frac{\int B(r, t)\mathrm{d}S}{\pi r_0^2}$$

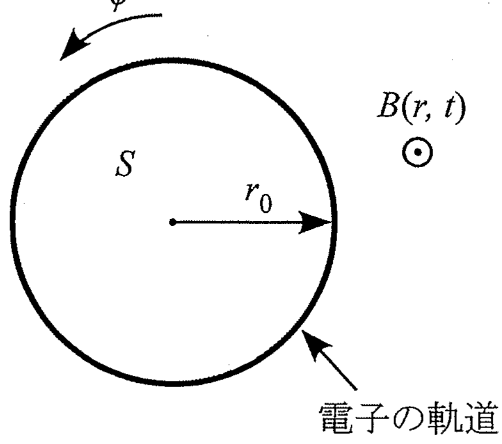
とする。次の問題に答えよ。ただし、放射によるエネルギーの損失は考えないとし、電子の運動が非相対論的であると仮定する。

1. $B_{\mathrm{avg}}(t)$ を用いて $r=r_0$ で生じる ϕ 方向の電場 E_ϕ を、ファラデーの法則の積分形を用いて計算せよ。

2. $r=r_0$ にある電子は、E_ϕ によって円形軌道の接線方向に加速される。それに対応する運動量 p_ϕ の時間変化 $\dfrac{\mathrm{d}p_\phi}{\mathrm{d}t}$ はいくらか。

3. $r=r_0$ の円形軌道に沿って運動している電子の p_ϕ 、r_0 および $B(r_0, t)$ の間の関係を求めよ。

4. 問2.と問3.の結果を用い、任意の時刻 t において半径 r_0 の円形運動をするのに必要な $B(r_0, t)$ と $B_{\mathrm{avg}}(t)$ との関係を求めよ。ただし、$t=0$ で $B(r, 0)=0$、$p_\phi=0$ とする。



総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
２０１９年度１０月入学・２０２０年度４月入学
博士課程（５年一貫制）入学者選抜試験問題

問題番号	専門科目－Ⅲ（量子力学）

図に示すような１次元ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 \le x \le a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

において、質量mの粒子に対する定常状態を考える。ここで$V_0 > 0$である。
この系について、以下の問いに答えよ。なお、$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$であり、hはプランク定数である。

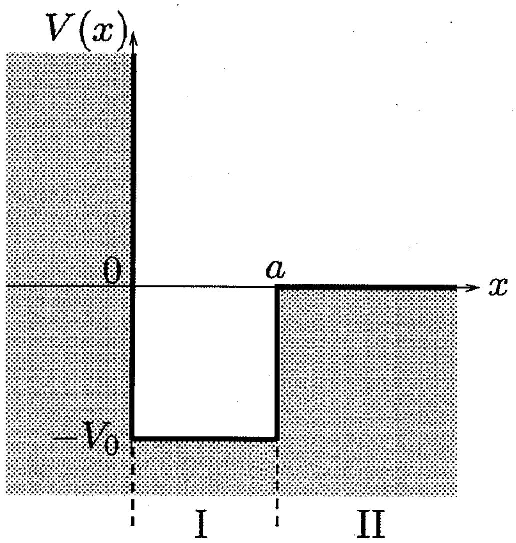
1. $0 \le x \le a$を領域I、$x > a$を領域IIと呼ぶとき、エネルギー固有値をEとして、領域Iと領域IIにおける波動関数$\phi_{\mathrm{I}}(x)$、$\phi_{\mathrm{II}}(x)$が満たすシュレディンガー方程式を書け。なお、$-V_0 < E < 0$である。

2. 問1.のシュレディンガー方程式の一般解を求めよ。

3. $x = 0$、$x = a$および$x \to \infty$における各波動関数が満たす境界条件を書け。

4. $k_{\mathrm{I}} = \dfrac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$および$k_{\mathrm{II}} = \dfrac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$としたとき、$k_{\mathrm{I}}^2 + k_{\mathrm{II}}^2 = \dfrac{2mV_0}{\hbar^2}$となるが、問3.での境界条件から、$k_{\mathrm{I}}$と$k_{\mathrm{II}}$が満たすもう一つの関係式を導け。

5. この系において、束縛状態が存在し得るためにV_0とaが満たすべき条件を導け。



問題番号	専門科目－Ⅳ（熱統計力学）

気体の状態変化が、無限小過程で準静的に行われる場合を考える。このとき、熱力学第一法則 $\mathrm{d}U = -\mathrm{d}'W + \mathrm{d}'Q$ が成り立つ。ここで、U は内部エネルギー、W は気体がなす仕事、Q は熱量である。d が付いている量、例えば、$\mathrm{d}U$ は微分量である。また、$\mathrm{d}'W$、 $\mathrm{d}'Q$ は単に微小量という意味であり、過程に依存する。

1. 圧力 p からなる気体の体積 V が、p を一定にして準静的に $\mathrm{d}V$ だけ変化する場合を考える。
関係式 $\mathrm{d}U = -\mathrm{d}'W + \mathrm{d}'Q$ を $\mathrm{d}'Q$ について、p と V を用いて書き直せ。

2. 圧力 p、体積 V、分子数 N、温度 T からなる理想気体の状態方程式 $pV = NkT$ が与えられる。ここで k はボルツマン定数である。理想気体の内部エネルギー U は体積 V に依存しないことを用い、関係式 $\mathrm{d}'Q = C_{\mathrm{V}}\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$ を導け。
ここで、定積比熱 C_{V} は $\left(\dfrac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{V}}$ で与えられ、括弧の右下に示される変数が微分の際に一定に保たれる。

3. 理想気体での定積比熱 C_{V} と定圧比熱 $C_{\mathrm{p}} = \left(\dfrac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{p}}$ との間の関係式を、分子数 N を用いて求めよ。

4. 理想気体の準静的断熱過程において pV^{γ} が一定になることを示せ。
ここで、$\gamma = \dfrac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{V}}}$ である。また、この過程で比熱 C_{p}、C_{V} は一定である。

5. 一般的な気体の断熱圧縮率 $\kappa_{\mathrm{ad}} = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_{\mathrm{ad}}}{V}$ と等温圧縮率 $\kappa_{\mathrm{T}} = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_{\mathrm{T}}}{V}$ との間に、$\kappa_{\mathrm{ad}} = \dfrac{C_{\mathrm{V}}}{C_{\mathrm{p}}}\kappa_{\mathrm{T}}$ の関係が成り立つことを示せ。
ここで、$\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_{\mathrm{ad}}$ は、断熱過程における条件式 $\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = 0$ を満たす $\dfrac{\partial V}{\partial p}$ の値である。

問題番号	専門科目－Ｖ（数学）

$t \geq 0$で定義される関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$$

について以下の問いに答えよ。

1. e^{at} のラプラス変換を求めよ。ここで、aは実数、$\mathrm{Re}(s) > a$ とする。$\mathrm{Re}(s)$ は s の実部を表す。

2. 関数 $f(t)$ の導関数を f' とするとき、f' のラプラス変換を $F(s)$、$f(0)$ を用いて表せ。なお、$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$ が成立するものとする。

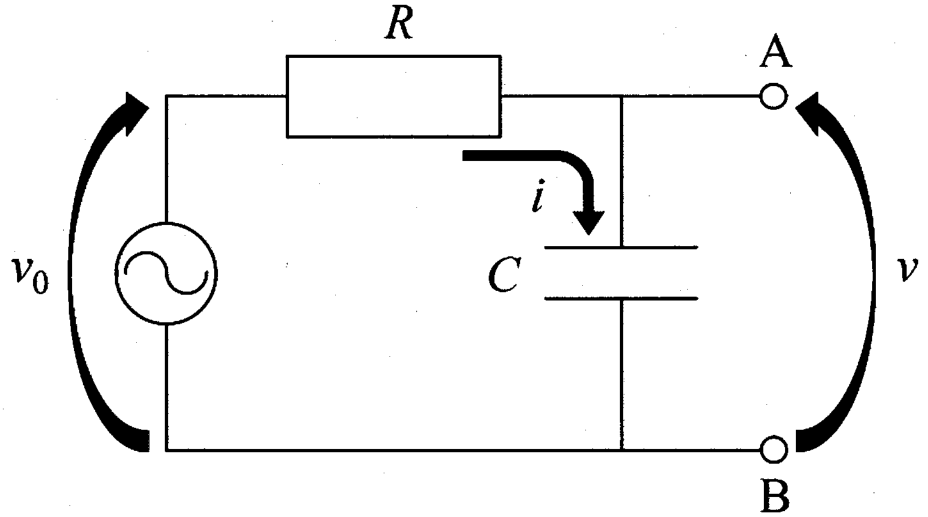
3. $x = x(t)$、$y = y(t)$に関する次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = -1$、$y(0) = -1$ のもとで解け。

$$\begin{cases} 2x' + x - y = 0 \\ 2y' + 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
２０１９年度１０月入学・２０２０年度４月入学
博士課程（５年一貫制）入学者選抜試験問題

問題番号	専門科目－VI（電気工学）

下図に示すように交流電源、抵抗器、コンデンサから構成される回路を考える。抵抗器の抵抗値は R、コンデンサの電気容量は C とする。R 及び C は時間に依らない定数とする。また、電源電圧は $v_0 = \mathrm{Re}(V_0 e^{j\omega t})$ で変化しているものとする。ここで、j は虚数単位、ω は角周波数、t は時間を表す。V_0 は複素定数である。また、$\mathrm{Re}(f)$ は f の実部を意味する。



1. 図に示した AB 2 点間の電圧 v と回路に流れる電流 i の関係をコンデンサの電気容量 C を用いて表せ。

2. 複素電圧 V、複素電流 I を $v = \mathrm{Re}(Ve^{j\omega t})$、$i = \mathrm{Re}(Ie^{j\omega t})$ のように定義する。ここで、V、I は時間 t に依存しない複素数である。このときコンデンサの複素インピーダンス $Z\,(=\dfrac{V}{I})$ が $Z = \dfrac{1}{j\omega C}$ で表されることを問 1. の結果を用いて証明せよ。必要ならば $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)$ の関係を使用せよ。

3. キルヒホッフの法則を用い、ω と $\left|\dfrac{V}{V_0}\right|$ の関係を求めよ。また、この関係の概形を図示することで本回路は周波数フィルタであることを示せ。