受験番号	

２０２０（令和２）年度（　４月入学）

２０２０（令和２）年度（１０月入学）

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻

博士課程（５年一貫制）

入学者選抜試験　筆記（専門科目）問題

【注意事項】

・ 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
・ 本問題冊子は，６ページ（本紙を除く）である。
  問題用紙及び解答用紙の不備，落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
・ ６題の試験問題の中から，３題を選択，解答すること。
・ 問題１題につき対応する１枚の解答用紙（両面使用可）を使用すること。
・ 問題冊子及び６枚全ての解答用紙の指定箇所に受験番号を必ず記入すること。
・ 採点を希望する問題の解答用紙の採点希望欄に「**YES**」を，希望しない問題の解答用紙には「**NO**」を記入すること。４枚以上の解答用紙に「**YES**」を記入した場合には，全ての解答が無効となることに注意すること。
・ 問題冊子の余白は，計算に用いてよい。
・ 問題冊子及び解答用紙は持ち帰らないこと。

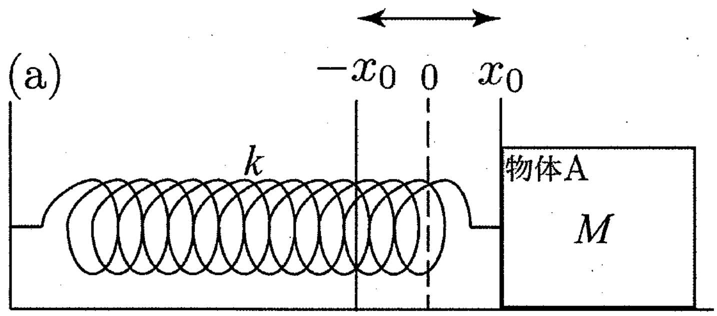
問題番号	専門科目－I （古典力学）

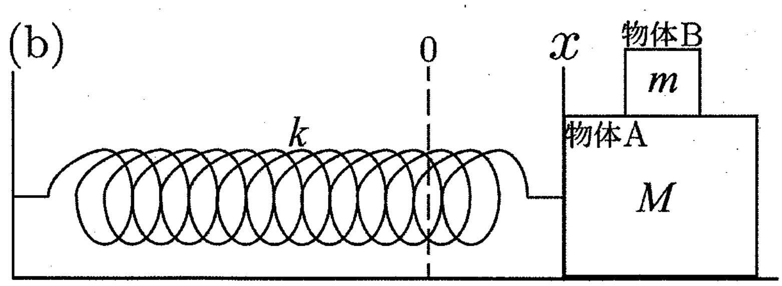
図 (a) のように、摩擦のない面上で質量 M の物体 A がばねを使った往復運動をしている。ばね定数を k として次の問いに答えよ。

1. 物体 A の運動方向を x として、x 方向の物体 A の運動方程式を書け。ここで、ばねの自然長位置を $x=0$ とする。
2. $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ とし、時刻 $t=0$ のとき、$x=x_0$ および $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ とする。問 1. の運動方程式を解き、x を x_0、ω、t で表せ。
3. ばねの振動の周期を $\dfrac{\pi}{6}$ [s]、$M=2$ [kg] として、k [N/m] を数値で求めよ。

図 (b) に示すように、同じばねを使って質量 $m=1$ [kg] の物体 B を物体 A の上に載せた場合を考える。物体 A と物体 B の間には静止摩擦力が働いており、その静止摩擦係数を 0.1 とする。次の問いに答えよ。

4. 自然長から x だけ伸ばした状態から物体 A が運動を始めるとき、物体 B が物体 A の上を滑らない最大の x を数値で答えよ。ただし、重力加速度を 9.8 [m/s^2] とする。





問題番号	専門科目－II （電磁気学）

真空中に置かれた図のような小半径 a 、大半径 b 、微小な隙間 δ を有するトーラス状の磁化されていない鉄心に、銅線を密着して N 回巻いたコイルを有する電磁石を考える。銅線は円形断面で半径 r 、抵抗率 ρ であり、電圧 V の直流電源に接続されており、電磁石は定常状態となっている。ただし、$r \ll a$ として銅線の長さは $2\pi aN$ と考えてよい。鉄心の透磁率を μ 、真空の透磁率を μ_0 、$b \gg a$ 、鉄心の中の磁束密度を一定とし、隙間の周辺効果は考えないものとする。次の問題に答えよ。

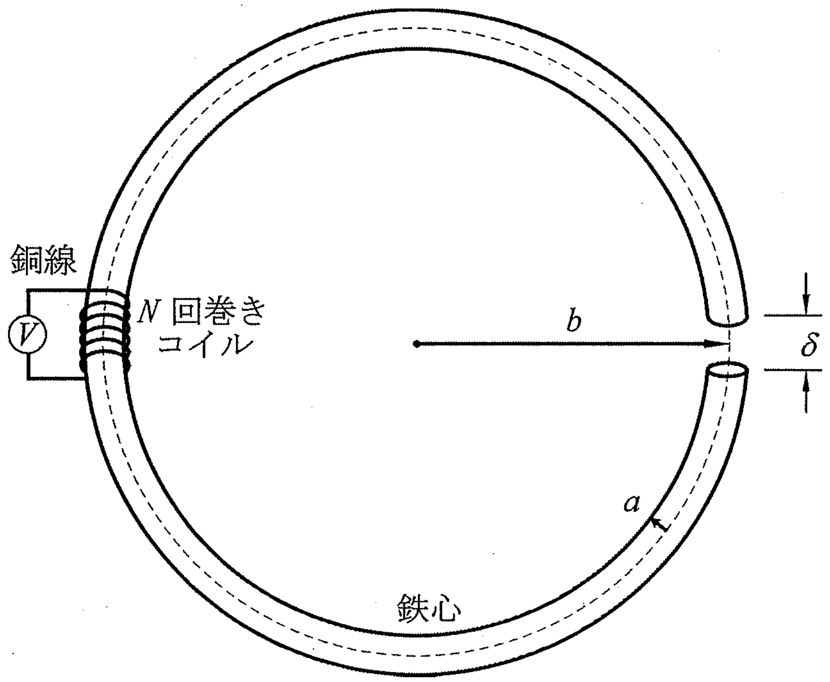
1. 銅線の抵抗 R と、銅線に流れる電流 I を求めよ。

2. 銅線が消費する電力を求めよ。

3. 中心から距離 b の位置で、トーラスの隙間 δ に生じる磁束密度 B を求めよ。

次に、電圧 V を急激に変化させた場合を考える。

4. コイルの自己インダクタンス L を求め、電流の時定数 $\tau = \dfrac{L}{R}$ を計算せよ。



問題番号	専門科目－Ⅲ（量子力学）

質量 m の粒子に対する x 方向の１次元シュレディンガー方程式、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\right)\psi(x,t)$$

について、ガリレイ変換、$x'=x-vt$、$t'=t$、(v は定数) の下で、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi'(x',t')=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+V'(x',t')\right)\psi'(x',t') \tag{1}$$

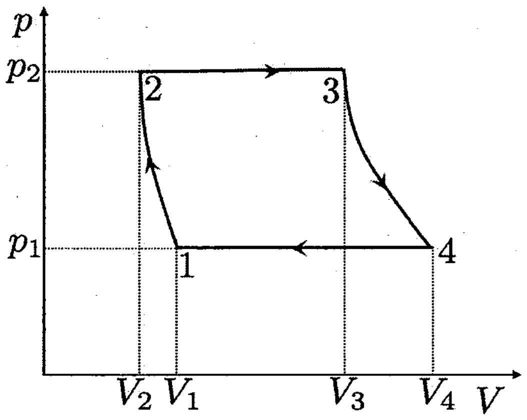
が成り立つとする。ここで、$V(x,t)$ はポテンシャルであり、$V'(x',t')=V(x,t)$ である。また、i は虚数単位、$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ であり、h はプランク定数である。このとき、以下の問いに答えよ。

1. 微分演算子 $\dfrac{\partial}{\partial x'}$ と $\dfrac{\partial}{\partial t'}$ を、$\dfrac{\partial}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial}{\partial t}$ を用いて表せ。
2. $\psi'(x',t')=e^{iS}\psi(x,t)$ とおいたとき、これを式 (1) に代入して、ψ と S に関する方程式を求めよ。ここで S は x と t に関するゼロでない実関数である。
3. 問 2. の結果において、ψ と $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ の係数をそれぞれゼロにすることで、$\dfrac{\partial S}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ が満たす２つの方程式を導け。
4. 問 3. の方程式を解いて、$v=0$ のときに $e^{iS}=1$ となるように $S(x,t)$ を定めよ。

総合研究大学院大学物理科学研究科核融合科学専攻
２０２０年度４月入学・２０２０年度１０月入学
博士課程（５年一貫制）入学者選抜試験問題

問題番号	専門科目－IV（熱統計力学）

理想気体の準静的無限小過程を考える。右図は、準静的循環過程の一つ、ジュールサイクルを表す。そこでは、状態 1→ 状態 2→ 状態 3→ 状態 4→ 状態 1 の状態変化を繰り返す。状態 1、状態 2、状態 3、状態 4 での圧力 p、温度 T、体積 V はそれぞれ (p_1, T_1, V_1)、(p_2, T_2, V_2)、(p_2, T_3, V_3)、(p_1, T_4, V_4) である。状態 1 から状態 2、状態 3 から状態 4 の過程は、断熱過程である。また、状態 2 から状態 3、状態 4 から状態 1 の過程は、等圧過程である。理想気体の状態方程式は、$pV = NkT$ である。ここで、N は分子数、k はボルツマン定数である。定圧比熱と定積比熱は C_{p} と C_{V} であり、それぞれ一定である。ここで関係式 $C_{\mathrm{p}} = C_{\mathrm{V}} + Nk$ が成り立つ。また $\gamma = \dfrac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{v}}}$ とする。



1. 理想気体の断熱過程において、pV^γ は一定である。状態 1 から状態 2 への断熱過程において、気体が外部になす仕事 $W_{1\to2} = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$ が、$C_{\mathrm{V}}(T_1 - T_2)$ で与えられることを示せ。

2. 外部になす仕事 $W(= W_{1\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to4} + W_{4\to1})$ を定圧比熱 C_{p} を用いて求めよ。

3. 状態 2 から状態 3 の過程で気体が受け取る熱量 Q を定圧比熱 C_{p} を用いて求めよ。

4. このジュールサイクルの効率 $\eta = \dfrac{W}{Q}$ が、

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

であることを示せ。

問題番号	専門科目－V（数学）

デカルト座標上で t を変数として、

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad (a \neq 0, b \neq 0)$$

と表される曲線Ｃについて、以下の問いに答えよ。

1. $t = 0$ から $t = t_1$ までの曲線Ｃの長さは $t_1\sqrt{a^2 + b^2}$ であることを示せ。

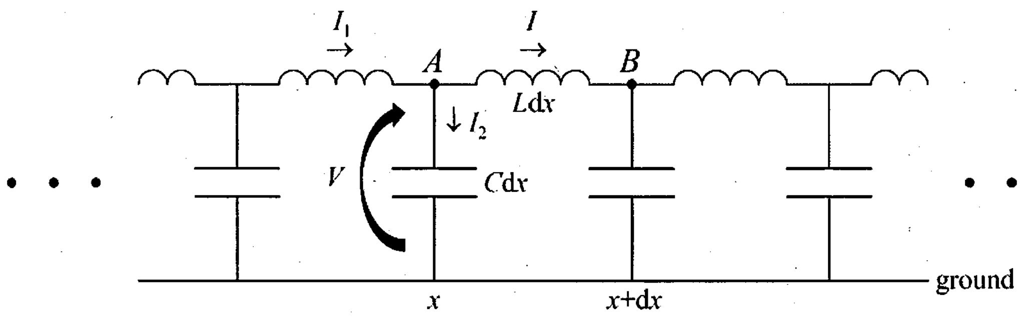
2. 次式で定義される、曲線Ｃの単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}$、単位主法線ベクトル $\boldsymbol{N}$、および単位従法線ベクトル $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

$$\boldsymbol{T} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|}, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right|}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$$

3. $t = \frac{\pi}{2}$ のときの曲線Ｃ上の点を含み、その点における単位従法線ベクトル $\boldsymbol{B}$ に垂直となる平面の方程式を求めよ。

問題番号	専門科目－VI（電気工学）

単位長さあたりのインダクタンス、キャパシタンスがそれぞれL、Cのコイルとコンデンサが無限に連続した伝送路を考える。下図に示すように微小区間dx毎にインダクタンスLdx、キャパシタンスCdxが配置されているものとする。ここで、伝送路に沿った点Aの位置をx、点Bの位置を$x+$dxとする。また、点Aのグラウンド(ground)に対する電位をV、点Aから点Bに向かう電流をIとして、以下の問いに答えよ。必要に応じて公式 $\mathrm{d}f(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t$ （$\mathrm{d}t=0$ なら $\mathrm{d}f(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}x=0$ なら $\mathrm{d}f(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t$）を使用せよ。但し、$t$は時刻を表す。



1. インダクタンスによるAB間の電位差を求めることで以下の式を証明せよ。

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=L\frac{\partial I}{\partial t}$$

2. 点Aの左側から点Aに向かう電流I_1が電流Iと点Aから下側（コンデンサ側）へ向かう電流I_2の和であること（$I_1=I+I_2$）を用いて以下の式を証明せよ。

$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial V}{\partial t}$$

3. 問 1.と問 2.で証明した式及び$\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 I}{\partial t\partial x}$の関係を用い、電位$V$に関する波動方程式を求め、$V=V_0\cos(kx-\omega t)$と置くことで、伝送路を伝わる波の位相速度を求めよ。但し、k、ω及びV_0は0でない実数とする。